**9° BORSA DI STUDIO "RICCARDO ROSSI"**
**Traccia di correzione**

*Maschera dei risultati per le domande a risposta chiusa:*

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | E | B | A | C | D | D | C | C | A | D | B | D | C | A | E | B | D |

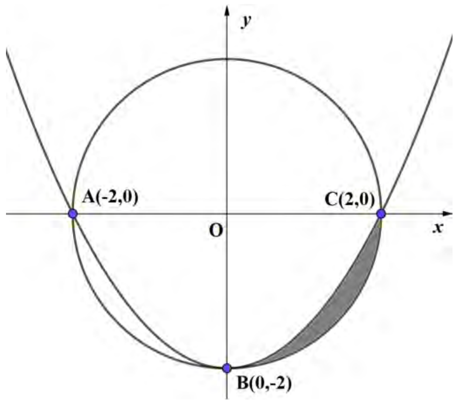
Risultati problemi numerici:

19) **17**

20) **42**

*Spiegazione delle risposte di Matematica e Fisica:*

**N. 1**
Quante unità di area $\left(u^2\right)$ misura l'area colorata in figura?



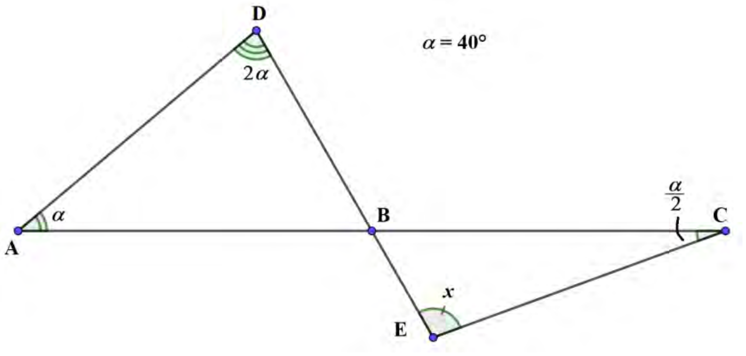

a) 1
b) $\dfrac{3\pi-8}{3}$
c) $\pi-3$
d) 0.5
e) 0.2

**Risp. B**
Calcoliamo l'area del segmento parabolico, delimitato dalla parabola e dall'asse *x*, mediante il teorema di Archimede: $A_1=\frac{2}{3}\cdot 4\cdot 2=\frac{16}{3}u^2$

Quest'area dev'essere sottratta all'area $\left(A_2=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2^2=2\pi\, u^2\right)$ del semicerchio.

L'area colorata è metà della differenza: $A=\dfrac{A_2-A_1}{2}=\dfrac{2\pi-\frac{16}{3}}{2}=\dfrac{3\pi-8}{3}u^2$

**N. 2**
Qual è la misura dell'angolo incognito (*x*) in figura?




a) 80°
b) 85°
c) 90°
d) 95°
e) 100°

**Risp. E**

Indichiamo con β l'ampiezza comune degli angoli (opposti al vertice) $\widehat{DBA}$ e $\widehat{CBE}$.
Per un'importante conseguenza del 2° teorema dell'angolo esterno otteniamo:

$$\begin{cases} \alpha + 2\alpha + \beta = 180° \\ \dfrac{\alpha}{2} + \beta + x = 180° \end{cases}$$

che, essendo $\alpha = 40°$, si riduce a:

$$\begin{cases} 120° + \beta = 180° \\ 20° + \beta + x = 180° \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 60° \\ \beta + x = 160° \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 60° \\ x = 100° \end{cases}$$

Di conseguenza, l'angolo $\widehat{BEC}$ misura $x = 100°$.

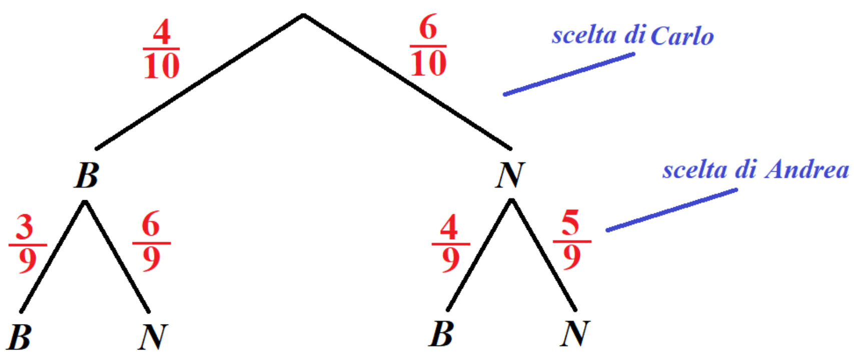
**N. 3**

In una scatola ci sono 4 maglie bianche e 6 nere. Andrea e Carlo, nell'ordine, prendono una maglia a caso ciascuno, con la luce spenta, e la indossano. Trova la probabilità che Andrea vesta la maglia nera se Carlo veste quella bianca.

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{3}{5}$

**Risp. B**

Consideriamo l'albero:




che rappresenta le probabilità di scelta dei due amici.
Dobbiamo calcolare

$$P(N_{Andrea} \mid B_{Carlo}) = \frac{P(N_{Andrea} \cap B_{Carlo})}{P(B_{Carlo})} = \frac{\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9}}{\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9}} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{6}{10}\left(\frac{4}{9} + \frac{5}{9}\right)} = \frac{4}{15} \cdot \frac{5}{3} = \frac{4}{9}$$

**N. 4**

In un triangolo $a = 60\,cm$, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{12}$ e $\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{4}$. Quanto vale $b$ (in $cm$)?

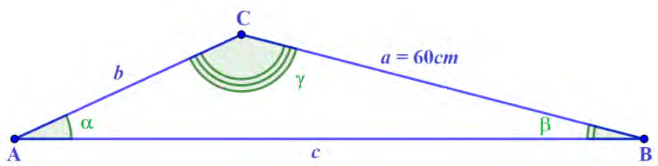
*a)* 36 *b)* 180 *c)* $\frac{5}{3}$ *d)* 144 *e)* 15

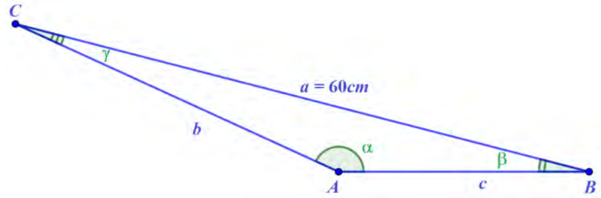
**Risp. A**

Dal punto di vista geometrico si presentano due possibilità, rappresentate nelle figure seguenti.
In entrambi i casi si perviene, però, allo stesso risultato.
Applicando il Teorema dei seni risulta, infatti:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \Leftrightarrow b = a\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha} = 60 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{5} = 36\,cm$$

(vd. anche le figure di pag. seguente)




**N. 5**
Scrivi il risultato della seguente espressione se $x, y$ sono numeri reali positivi.

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)+\sqrt{y\sqrt[3]{y}}$$

a) $\sqrt[3]{xy}$ b) $\sqrt{x^3}$ c) $\sqrt[3]{x^2}$ d) $\sqrt{y^3}$ e) $\sqrt[3]{y^2}$

**Risp. C**

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)+\sqrt{y\sqrt[3]{y}}=$$

$$=\sqrt{y^2}-\sqrt{x^2}+\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{xy}\right)+\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)+\sqrt[6]{y^4}=$$

$$=y-x+\sqrt[3]{x^3}-\sqrt[3]{y^3}+\sqrt[3]{x^2}-\cancel{\sqrt[3]{y^2}}+\cancel{\sqrt[3]{y^2}}=$$

$$=\cancel{y}-\cancel{x}+\cancel{x}-\cancel{y}+\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x^2}$$

**N. 6**
Se $\alpha=\log_5 9\cdot\log_3 5\cdot\log_2 7$, quanto vale $\left(\sqrt{2}\right)^\alpha$ ?

a) 2 b) 4 c) 6 d) 7 e) 9

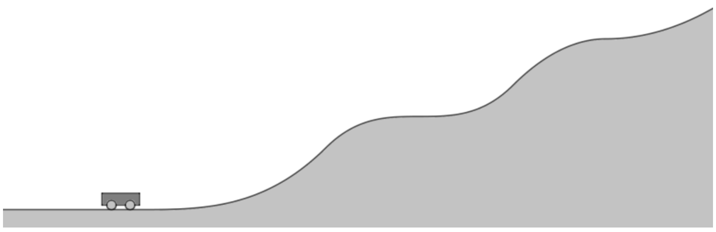
**Risp. D**
Cambiando base ai logaritmi risulta

$$\alpha=\log_5 9\cdot\log_3 5\cdot\log_2 7=2\cancel{\log_5 3}\cdot\frac{1}{\cancel{\log_5 3}}\cdot\log_2 7=\log_2 49$$

Pertanto:

$$\left(\sqrt{2}\right)^\alpha=\left(\sqrt{2}\right)^{\log_2 49}=\sqrt{2^{\log_2 49}}=\sqrt{49}=7$$

**N. 7**
Due carrelli, di massa $m_1$ e $m_2$ rispettivamente (con $m_1<m_2$), si muovono da sinistra verso destra con energia cinetica $K$ quando arrivano di fronte ad una salita. Supponendo ogni attrito trascurabile, quale delle affermazioni è vera?



a) Il carrello di massa $m_1$ raggiunge un'altezza minore.
b) Il carrello di massa $m_1$ raggiunge un'altezza maggiore.
c) Non si può rispondere senza conoscere la pendenza.
d) Entrambi i carrelli arrivano alla medesima altezza.
e) Nessuna delle precedenti affermazioni è vera.

**Risp. D**
Sia K l'energia cinetica del carrello di massa *m*. Utilizzando l'approssimazione *punto materiale*, risulta:

$$K=\frac{1}{2}mv^2$$

L'energia potenziale del carrello nel punto di altezza massima raggiunto è

$$U = mgh$$

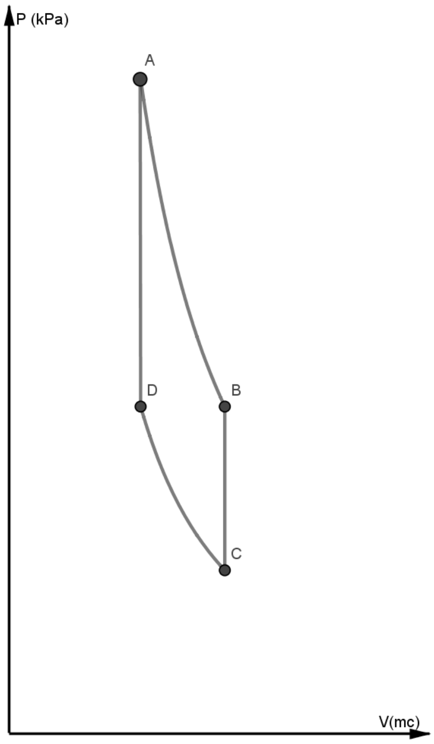
Per il *principio di conservazione dell'energia meccanica*:

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 = \cancel{m}gh \iff h = \frac{v^2}{2g}$$

Come si vede, l'altezza raggiunta non dipende dalla massa del carrello.

**N. 8**

Un gas ideale viene sottoposto ad un ciclo termodinamico costituito da due trasformazioni *adiabatiche* alternate a due trasformazioni *isocore* (vedi rappresentazione sul piano di Clapeyron).




La pressione dello stato A è $p_A = 200kPa$, e le pressioni degli stati B e D sono $p_B = p_D = 100kPa$. Calcola la pressione dello stato C.

a) $p_C = 40kPa$  c) $p_C = 50kPa$  e) $p_C = 60kPa$

b) $p_C = 45kPa$  d) $p_C = 55kPa$

**Risp. C**

AB e CD sono trasformazioni adiabatiche; quindi:

$$\begin{cases} p_A V_A^\gamma = p_B V_B^\gamma \\ p_D V_D^\gamma = p_D V_D^\gamma \end{cases} \qquad (1)$$

DA e BC sono trasformazioni isocore; quindi:

$$\begin{cases} V_A = V_D \\ V_B = V_C \end{cases} \qquad (2)$$

Dividendo le (1) membro a membro otteniamo:

$$\frac{p_D V_D^\gamma}{p_A V_A^\gamma} = \frac{p_C V_C^\gamma}{p_B V_B^\gamma} \iff \frac{p_D}{p_A}\left(\frac{V_D}{V_A}\right)^\gamma = \frac{p_C}{p_B}\left(\frac{V_C}{V_B}\right)^\gamma$$

che, semplificata tenendo conto delle (2), diviene:

$$\frac{p_D}{p_A} = \frac{p_C}{p_B}$$

da cui si ricava subito

$$p_C = \frac{p_D}{p_A} p_B = \frac{100kPa}{200kPa} \cdot 100kPa = \frac{1}{2} \cdot 100kPa = 50kPa$$

**N. 9**

Un cubetto di ghiaccio galleggia in un bicchiere d'acqua. Dopo un certo tempo il cubetto si scioglie, come varia il livello dell'acqua nel bicchiere?

a) Aumenta.
b) Diminuisce.
c) Non varia.
d) Per rispondere occorre conoscere il livello iniziale dell'acqua e il volume del cubetto di ghiaccio.
e) Per rispondere occorre conoscere la densità del ghiaccio e dell'acqua.

**Risp. C**

La condizione di galleggiamento può essere espressa mediante la relazione

$$d_a V_{IMM} = d_g V_{TOT}$$

dove $V_{TOT}$ è il volume del cubetto, $V_{IMM}$ il volume della parte immersa (cioè dell'acqua spostata), $d_a$ è la densità dell'acqua e $d_g$ quella del ghiaccio.

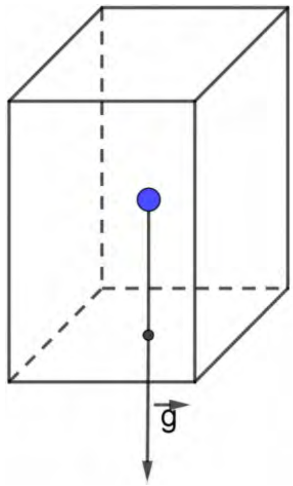
Durante il passaggio di stato la massa del ghiaccio non varia e si trasforma in una pari massa d'acqua, quindi il volume di ghiaccio $V_{TOT}$ si trasforma esattamente nel volume $V_{IMM}$ d'acqua. Perciò il livello dell'acqua non varia.

*Questo è il motivo per cui lo scioglimento dei ghiacci dell'Artico è una catastrofe, ma non fa aumentare il livello del mare. Il problema è lo scioglimento dei ghiacci Antartici o montani che, come è noto, non galleggiano!*

**N. 10**

Una pallina di vetro cava è ancorata al fondo di un acquario a forma di parallelepipedo mediante una cordicella, rimanendo però completamente immersa. A causa di un "incidente" l'acquario cade dalla finestra di un palazzo "molto alto" con il fondo rivolto verso il basso. Durante la caduta la cordicella si spezza. Calcola l'accelerazione a cui è sottoposta la pallina nell'istante immediatamente successivo (il riferimento è solidale al palazzo).

Supponi che la densità della pallina sia ½ di quella dell'acqua contenuta nell'acquario (si suppongono trascurabili tutte le forme di attrito).




a) $\vec{a} = -\vec{g}$
b) $\vec{a} = \vec{g}$
c) $\vec{a} = -2\vec{g}$
d) $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{g}$
e) $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{g}$

**Risp. A**

Come riferimento usiamo il sistema del laboratorio, rispetto al quale l'acquario è in caduta libera.

Durante il *"volo"*, inizialmente sulla pallina agiscono la forza peso, la spinta di Archimede e la tensione del filo. Dato che la caduta è libera la tensione e la spinta si fanno equilibrio, quindi la risultante è la forza peso.

Quando si rompe il filo sulla pallina agiscono solo la forza peso e la spinta di Archimede. Dato che la densità della pallina è metà di quella del liquido la spinta di Archimede ha intensità doppia della forza peso della pallina. Scelto come verso positivo quello della forza peso e indicata con *m* la massa della pallina, la risultante è

$$\vec{F} = m\vec{g} - 2m\vec{g} = -m\vec{g}$$

e quindi

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = -\vec{g}$$

**N. 11**

Un satellite percorre un'orbita circolare di raggio R in un periodo di 4 ore. Qual è il periodo di un secondo satellite, con orbita di raggio $R' = 4R$ intorno allo stesso pianeta?

a) 4 ore b) 8 ore c) 16 ore d) 32 ore e) 64 ore

**Risp. D**

Per tutti i satelliti di uno stesso pianeta, il rapporto $\frac{T^2}{R^3}$ è costante (3° *legge di Keplero*).

Perciò, indicando con $R_1, T_1, R_2, T_2$ il raggio ed il periodo di rivoluzione per il 1° ed il 2° satellite rispettivamente, risulta:

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3} \Leftrightarrow T_2^2 = T_1^2 \cdot \frac{R_2^3}{R_1^3} \Leftrightarrow T_2 = T_1 \cdot \sqrt{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3} = 4ore \cdot \sqrt{\left(\frac{4R_1}{R_1}\right)^3} = 4ore \cdot \sqrt{\left(2^2\right)^3} = 32ore$$

***Dimostrazione della 3° legge di Keplero***

Supponiamo che la traiettoria di un satellite sia circolare.

Indichiamo con R il raggio della traiettoria del centro di massa del satellite rispetto a quello del pianeta.

La velocità del satellite è:

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

e la sua accelerazione centripeta è

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{1}{\cancel{R}} \cdot \frac{4\pi R^{\cancel{2}}}{T^2} = \frac{4\pi R}{T^2}$$

D'altra parte, l'accelerazione (dovuta all'interazione gravitazionale) è data da

$$a_c = G\frac{M}{R^2}$$

ove M rappresenta la massa del pianeta.
Risulta quindi:

$$G\frac{M}{R^2} = \frac{4\pi R}{T^2} \Leftrightarrow \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi R}{GM}$$

ovvero il rapporto $\frac{T^2}{R^3}$ è costante.

**N. 12**
Dopo un forte acquazzone l'acqua gocciola con ritmo regolare dal ramo di un faggio su un sasso che fa da tetto alla tana di una talpa, producendo un suono che disturba il suo sonno. L'altezza del ramo dal sasso è 5,0 *m* e una goccia si stacca dal ramo nel momento esatto in cui la goccia precedente ha percorso 5,0 *cm*. Calcola la frequenza del suono che disturba la talpa.
[Trascura ogni forma di attrito ed utilizza l'approssimazione $g = 10m/s^2$ ]

a) f = 5Hz b) f = 10Hz c) f = 12,5Hz d) f = 20Hz e) f = 25Hz

**Risp. B**
Supponiamo che il moto delle gocce sia uniformemente accelerato e consideriamo due gocce, una che all'istante iniziale si stacca dal ramo e una che ha già percorso 5,0 *cm*.
Tutte le gocce hanno il medesimo moto con uno sfasamento temporale fra due "partenze" che può essere facilmente determinato mediante la formula:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$$

dove $\Delta t$ indica l'intervallo di tempo fra due "partenze" e $s$ indica lo spazio percorso dalla goccia che è già in volo. Questo intervallo di tempo è anche quello che intercorre fra gli arrivi delle gocce sul sasso.
In effetti i diagrammi *s,t* dei due moti sono due archi di parabola che si possono sovrapporre con una traslazione di vettore $\Delta t$ lungo l'asse del tempo.
È quindi semplice ricavare la frequenza:

$$f = \sqrt{\frac{g}{2s}}$$

e quindi

$$f = \sqrt{\frac{10\frac{m}{s^2}}{2 \cdot 0.08m}} = 10Hz$$

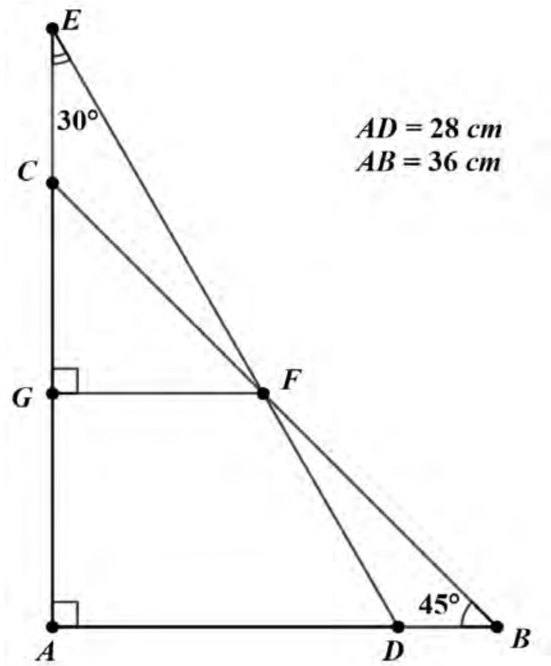
**N. 19**

La figura a fianco mostra due triangoli rettangoli con i cateti sovrapposti.
Stima la lunghezza del segmento FG, approssimando la misura ai *cm*.

**Nota:** usa, all'occorrenza, le approssimazioni

$$\sqrt{3} \simeq 1.75 \quad \text{e} \quad \sqrt{2} \simeq 1.4$$

[quesito proposto da Andrea Virgilito, UniCT]




**Soluzione**

I triangoli ABC e GFC sono simili; così pure i triangoli ADE e GFE.
Se poniamo $FG = x$ risulta quindi $FE = 2x$ ed anche $GC = x$.
Dovendo essere $AC = AD + DB = (28+8)cm = 36\,cm$, risulta anche:

$$AG = 36 - x$$

Inoltre:

- $GE = \sqrt{3}x \simeq 1.75\,x$
- $AE = 28\sqrt{3}cm \simeq 49\,cm$

Quindi:

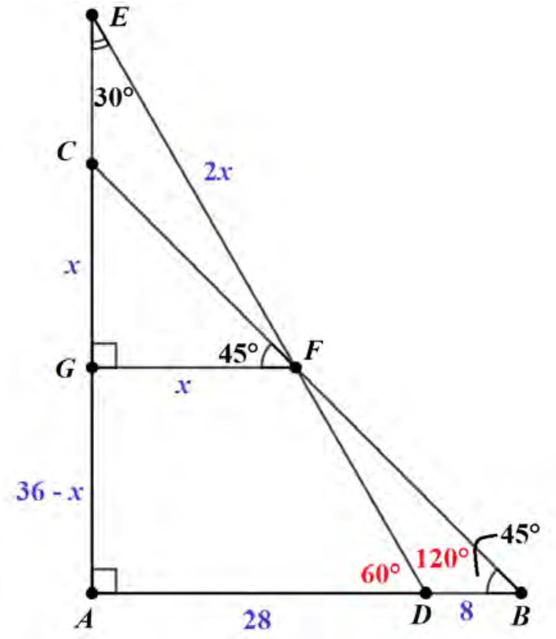
$$CE = AE - AC = (49-36)cm = 13cm$$

D'altra parte:

$$CE = GE - GC \simeq 1.75x - x = 0.75x$$

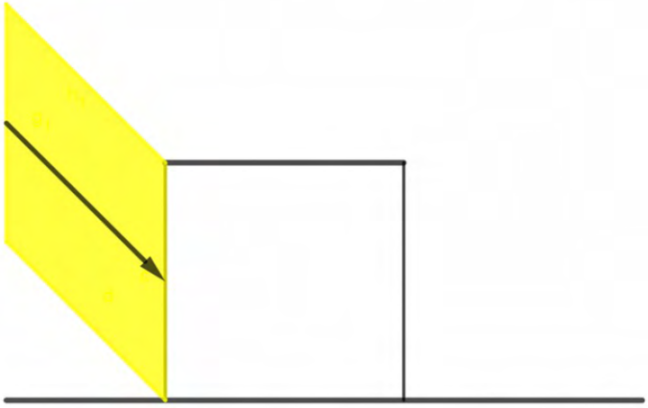
Quindi:

$$0.75x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{0.75} = 17.\bar{3}cm \simeq 17\,cm$$

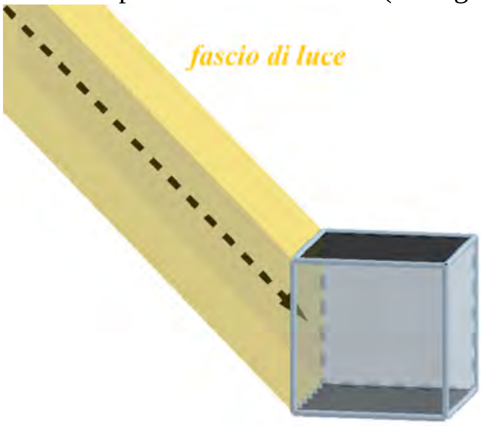


**N. 20**

Un cubo di vetro di lato 10 *cm* è appoggiato su un piano orizzontale. Le facce laterali del cubo sono perfettamente trasparenti mentre le facce superiore ed inferiore sono completamente assorbenti (vd. figure).



Visione laterale (2D)



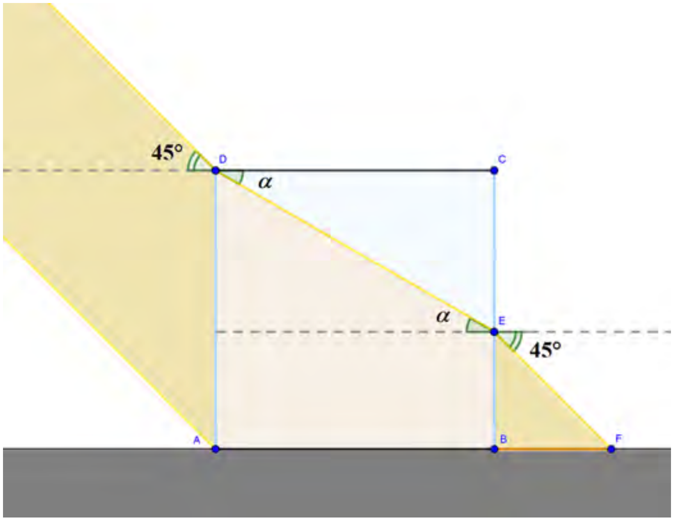

Visione 3D

Un fascio di luce incide su una faccia laterale del cubo formando un angolo di incidenza di 45° ed illuminandola completamente (la luce illumina direttamente solo questa faccia e i "raggi" luminosi sono paralleli alle due facce laterali ad essa contigue).

Calcola l'area della superficie del piano d'appoggio che risulta illuminata dalla luce che attraversa il cubo.

**Note:** Indice di rifrazione del vetro $n = 1.4$. All'occorrenza utilizza le approssimazioni $\sqrt{3} \simeq 1.74$ e $\sqrt{2} \simeq 1.4$.

**Soluzione**




Come primo passo determiniamo la distanza del punto E (in cui incide il raggio rifratto che passa per D) ed il punto C, vertice del cubo.

Per farlo dobbiamo conoscere α.

Per la legge di Cartesio:

$$n_1 \operatorname{sen} 45° = n_2 \operatorname{sen} \alpha \iff$$

$$\iff 1 \cdot \operatorname{sen} 45° = n \operatorname{sen} \alpha \iff$$

$$\iff \operatorname{sen} \alpha = \frac{\operatorname{sen} 45°}{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{n} \simeq \frac{1.4}{2} \cdot \frac{1}{1.4} = \frac{1}{2}$$

Quindi

$$\operatorname{tg} \alpha \simeq \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq \frac{1.74}{3} = 0.58$$

Per i teoremi sui triangoli rettangoli, quindi:

$$CE = CD \cdot \operatorname{tg} \alpha = 10 \cdot 0.58 = 5.8\,cm$$

Il triangolo BEF è rettangolo ed ha un angolo interno $\left(\widehat{BEF}\right)$ di 45°, pertanto è pure isoscele.

Quindi:

$$BF = BE = BC - CE = 4.2\,cm$$

La superficie del piano d'appoggio illuminata dalla luce che esce dal cubo ha un lato di 10 *cm* ed uno di 4.2 *cm*; la sua area vale

$$Area = 10 \cdot 4.2 = 42\,cm^2$$

**Matematica – problema dimostrativo**
**1° parte**
Sia α uno zero del polinomio $P(x)=x^2-3x+1$. Senza risolvere l'equazione, determina il valore del rapporto

$$\frac{\alpha^3}{\alpha^6+1}$$

**Soluzione:**
Per ipotesi, $\alpha^2-3\alpha+1=0$ e quindi anche

$$\alpha^2+1=3\alpha\,. \tag{1}$$

Pertanto:

$$\alpha=\frac{\alpha^2+1}{3} \tag{2}$$

Elevando al cubo ambo i membri della (2) otteniamo:

$$\alpha^3=\frac{\alpha^6+3\alpha^4+3\alpha^2+1}{27}=\frac{\alpha^6+1}{27}+\frac{3\alpha^2\left(\alpha^2+1\right)}{27}=\frac{\alpha^6+1}{27}+\frac{\alpha^2\left(\alpha^2+1\right)}{9}$$

Applicando la (1) otteniamo:

$$\alpha^3=\frac{\alpha^6+1}{27}+\frac{\alpha^2\cdot\cancel{3}\alpha}{\cancel{9}}=\frac{\alpha^6+1}{27}+\frac{\alpha^3}{3}$$

ovvero

$$\frac{2}{3}\alpha^3=\frac{\alpha^6+1}{27} \tag{3}$$

Semplificando la (3) ricaviamo facilmente:

$$18\alpha^3=\alpha^6+1$$

da cui

$$\frac{\alpha^3}{\alpha^6+1}=\frac{1}{18}$$

**2° parte**
Sia β uno zero del polinomio $x^2-x+1$. Senza risolvere l'equazione, determina il valore dell'espressione:

$$\beta^7+\frac{1}{\beta^7}$$

**Soluzione:**
Per ipotesi risulta $\beta^2-\beta+1=0$ e quindi anche

$$\beta^2+1=\beta\,. \tag{4}$$

Sicuramente $\beta\neq 0$; dividendo per β ambo i membri della (4) otteniamo:

$$\beta+\frac{1}{\beta}=1 \tag{5}$$

Fattorizzando il binomio $\beta^7+\frac{1}{\beta^7}$ (mediante la regola di Ruffini, ad esempio) otteniamo:

$$\beta^7+\frac{1}{\beta^7}=\underbrace{\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)}_{1}\left(\beta^6-\beta^5\cdot\frac{1}{\beta}+\beta^4\cdot\frac{1}{\beta^2}-\beta^3\cdot\frac{1}{\beta^3}+\beta^2\cdot\frac{1}{\beta^4}-\beta\cdot\frac{1}{\beta^5}+\frac{1}{\beta^6}\right)$$

ovvero

$$\beta^7 + \frac{1}{\beta^7} = \left(\beta^6 + \frac{1}{\beta^6}\right) - \left(\beta^4 + \frac{1}{\beta^4}\right) + \left(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}\right) - 1 \tag{6}$$

Osserviamo ora che:

- $\beta^2 + \frac{1}{\beta^2} = \left(\underbrace{\beta + \frac{1}{\beta}}_{1}\right)^2 - 2\cancel{\beta} \cdot \frac{1}{\cancel{\beta}} = 1 - 2 = -1$
- $\beta^4 + \frac{1}{\beta^4} = \left(\underbrace{\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}}_{-1}\right)^2 - 2\cancel{\beta^2} \cdot \frac{1}{\cancel{\beta^2}} = 1 - 2 = -1$
- $\beta^6 + \frac{1}{\beta^6} = \left(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}\right)\left(\beta^4 - \cancel{\beta^2} \cdot \frac{1}{\cancel{\beta^2}} + \frac{1}{\beta^4}\right) = \left(\underbrace{\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}}_{-1}\right)\left(\underbrace{\beta^4 + \frac{1}{\beta^4}}_{-1} - 1\right) = 2$

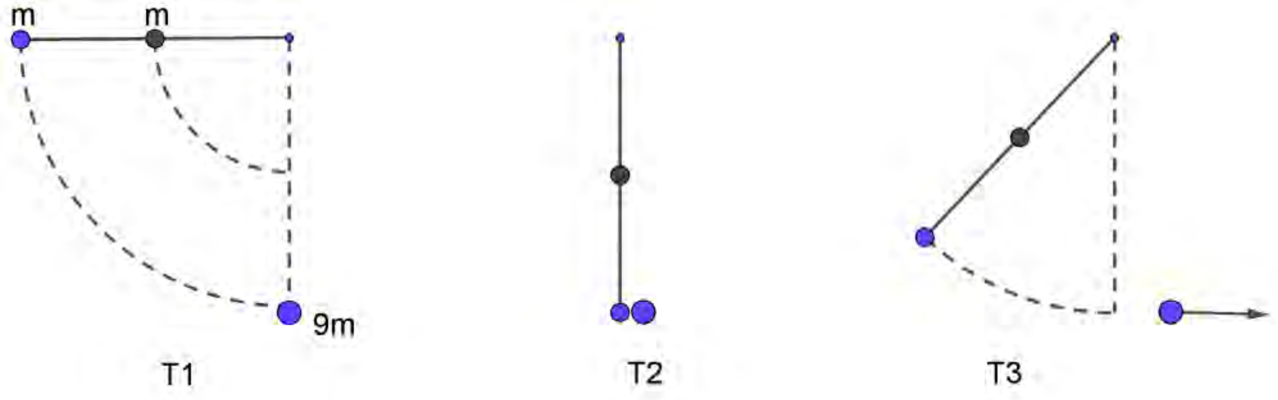
Dalle precedenti considerazioni si deduce facilmente che:

$$\beta^7 + \frac{1}{\beta^7} = \left(\beta^6 + \frac{1}{\beta^6}\right) - \left(\beta^4 + \frac{1}{\beta^4}\right) + \left(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}\right) - 1 = 2 - (-1) + (-1) - 1 = 1$$

======

**Problema FISICA**

Un’asta rigida di massa trascurabile e lunghezza $2L$ è incernierata ad un estremo, sull’asta sono presenti due sferette identiche di massa m, una nel punto medio dell’asta l’altra nell’estremo libero. Inizialmente l’asta è in posizione orizzontale (istante T1), viene quindi lasciata libera di ruotare e va a colpire un bersaglio di massa $9m$ che si trova esattamente in verticale sotto la cerniera a distanza $2L$ (istante T2).
Supponendo che l’urto sia perfettamente elastico, calcola l’altezza massima raggiunta dall’estremo libero dell’asta dopo il rimbalzo (istante T3).




**SVOLGIMENTO**

Consideriamo un riferimento con l’origine nella posizione iniziale del bersaglio, asse delle ascisse orizzontale orientato verso destra e asse delle ordinate verticale orientato verso l’alto.
All’istante T1 il sistema ha energia cinetica nulla, mentre l’energia potenziale dell’asta (comprese le due sferette) è $U_1 = 4mgL$.

SUBITO PRIMA DELL’URTO l’energia dell’asta è data dalla somma dell’energia potenziale (della sferetta che sta più in alto) e dell’energia cinetica delle due sferette. Se indichiamo con $v_1$ la velocità della sferetta superiore, $2v_1$ sarà la velocità della sferetta inferiore (proprietà del moto circolare), quindi l’energia totale dell’asta si può esprimere mediante

$$E_{tot,1} = mgL + \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}m(2v_1)^2$$

Semplificando:

$$E_{tot,1} = mgL + \frac{5}{2}mv_1^2$$

Per il *principio di conservazione dell'energia*:

$$4mgL = mgL + \frac{5}{2}mv_1^2 \iff 3mgL = \frac{5}{2}mv_1^2$$

Da cui si ricava:

$$v_1^2 = \frac{6}{5}gL \qquad (1)$$

URTO FRONTALE LUNGO L'ASSE DELLE ASCISSE: applicando la *conservazione della quantità di moto*, indicato con $v_2$ la velocità della sferetta superiore e con $u_2$ la velocità del bersaglio dopo l'urto, si ha:

$$mv_1 + m \cdot 2v_1 = mv_2 + m \cdot 2v_2 + 9mu_2$$

da cui si ricava:

$$3v_1 = 3v_2 + 9u_2$$

ovvero

$$v_2 = v_1 - 3u_2 \qquad (2)$$

Dato che l'urto è elastico, dalla *conservazione dell'energia cinetica* si ha

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}m(2v_1)^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}m(2v_2)^2 + \frac{1}{2}9mu_2^2$$

Semplificando:

$$v_1^2 + 4v_1^2 = v_2^2 + 4v_2^2 + 9u_2^2 \iff 5v_1^2 = 5v_2^2 + 9u_2^2$$

e sostituendo la (2) otteniamo:

$$5v_1^2 = 5(v_1 - 3u_2)^2 + 9u_2^2 \iff 5v_1^2 = 5\left(v_1^2 - 6v_1u_2 + 9u_2^2\right) + 9u_2^2 \iff$$

$$\iff 0 = 5\left(-6v_1u_2 + 9u_2^2\right) + 9u_2^2 \iff 3u_2\left[-10v_1 + 15u_2 + 3u_2\right] = 0 \iff 2u_2\left[9u_2 - 5v_1\right] = 0$$

da cui ricaviamo:

$$u_2\left[9u_2 - 5v_1\right] = 0 \qquad (3)$$

Dalla (3) otteniamo:

- $u_2 = 0$, che corrisponde al caso in cui l'urto non è ancora avvenuto;
- $u_2 = \frac{5}{9}v_1$, che è la velocità del bersaglio nell'istante immediatamente successivo all'urto. In questo caso, sostituendo nella (1) otteniamo:

  $$v_2 = v_1 - 3\left(\frac{5}{9}v_1\right) = -\frac{2}{3}v_1 .$$

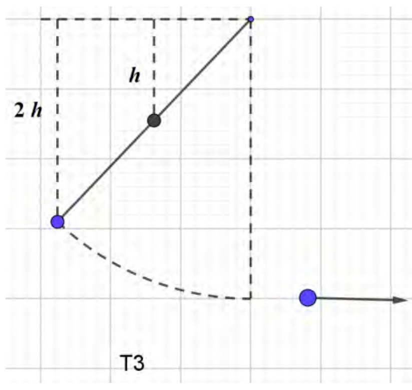
  In questo caso, il segno negativo significa che l'asta rimbalza e torna indietro.

RISALITA DELL'ASTA DOPO L'URTO: Subito dopo l'urto l'energia totale dell'asta è diventata

$$E_{tot,2} = mgL + \frac{1}{2}m\left(-\frac{2}{3}v_1\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(-2\cdot\frac{2}{3}v_1\right)^2 = mgL + \frac{1}{2}m\left(\frac{4}{9} + \frac{16}{9}\right)v_1^2 = mgL + \frac{10}{9}mv_1^2$$

Sostituendo l'espressione (1) nella precedente relazione otteniamo:

$$E_{tot,2} = mgL + \frac{10}{9}m\left(\frac{6}{5}gL\right) = \frac{7}{3}mgL$$




All'istante T3 questa energia diviene tutta energia potenziale. Per calcolare la sua espressione fissiamo un'incognita *h* come in figura:

$$E_{tot,3} = mg(2L - 2h) + mh(2L - h) = mg(4L - 3h)$$

Per il *principio di conservazione dell'energia*:

$$\frac{7}{3}mgL = mg(4L - 3h)$$

da cui

$$\frac{7}{3}L = 4L - 3h \iff 3h = 4L - \frac{7}{3}L \iff 3h = \frac{5}{3}L$$

ovvero

$$h = \frac{5}{9}L$$

e rispetto all'asse delle ascisse la quota dell'estremo dell'asta avrà ordinata $y_3 = 2L - \frac{5}{9}L = \frac{13}{9}L$ .