6° BORSA DI STUDIO “RICCARDO ROSSI”
Traccia di correzione

<u>*Maschera dei risultati per le domande a risposta chiusa:*</u>

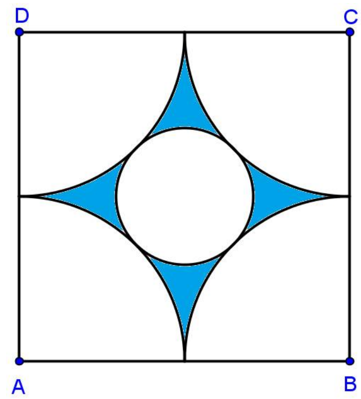
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
C	D	A	D	E	C	D	B	D	C	D	A	A	D	C	E	B	D

Risultati problemi numerici:

19) **48**

20) **3000**

<u>*Spiegazione delle risposte di Matematica e Fisica:*</u>



N. 1

Il raggio di ciascun quadrante è 10 cm e la diagonale AC misura $20\sqrt{2} \simeq 28\,cm$.

Quindi il raggio del cerchio interno è 4 cm. L’area bianca vale:

$$4 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 10^2 + \pi \cdot 16 = 116\pi \simeq 348\,cm^2 .$$

Quindi l’area colorata vale $400 - 348 = 52\,cm^2$

N. 2

Osserviamo innanzitutto che, se $P_2(x)$ è prodotto di fattori di 1° grado si può scrivere:

$$P_2(x) = k(x - c_1) \cdot (x - c_2) \cdot \ldots \cdot (x - c_n)$$

Dal momento che $gr(P_1) < gr(P_2)$ e che $P_1(x)$ divide $P_2(x)$, detto $m = gr(P_1)$ possiamo scrivere anche:

$$P_1(x) = h(x - c_1) \cdot (x - c_2) \cdot \ldots \cdot (x - c_m)$$

Nota: è sempre possibile pensare di aver riorganizzato i termini dei prodotti (sfruttando la proprietà commutativa) in modo che “esattamente” i primi *m* zeri di $P_2(x)$ siano zeri anche di $P_1(x)$.

A questo punto, se $Q(x)$ è il quoziente della divisione tra polinomi, otteniamo

$$P_2(x) = h(x - c_1) \cdot (x - c_2) \cdot \ldots \cdot (x - c_m) Q(x)$$

Chiaramente il polinomio $Q(x)$ ha almeno uno zero che chiamiamo *a*.

Pertanto:

$$P_2(a) = h(a - c_1) \cdot (a - c_2) \cdot \ldots \cdot (a - c_m) \underbrace{Q(a)}_{=0} = 0$$

N. 3

I numeri primi sono esattamente 2 su 4. Quindi abbiamo una sola coppia su 6 possibili.

N. 4

Decomponendo la frazione otteniamo:

$$\frac{5x - 11}{2x^2 + x - 6} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{2x - 3} = \frac{2Ax - 3A + Bx + 2B}{2x^2 + x - 6} = \frac{(2A + B)x + (2B - 3A)}{2x^2 + x - 6}$$

Quindi:

$$\begin{cases}2A+B=5\\2B-3A=-11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4A+2B=10\\3A-2B=11\end{cases}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\begin{cases}A=3\\9-2B=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=3\\B=-1\end{cases}$$

da cui

$$\frac{5x-11}{2x^2+x-6}=\frac{3}{x+2}-\frac{1}{2x-3}$$

e

$$A+B=2$$

N. 5

In 3 minuti il disco compie circa 100 giri; i raggi delle tracce microsolco formano una progressione aritmetica di ragione $d=\frac{20-10}{100}=0.1\,cm$. La lunghezza totale della traccia è, quindi:

$$c_1+c_2+\ldots+c_{100}=2\pi\left(r_1+r_2+\ldots+r_{100}\right)=2\pi\cdot\frac{r_1+r_{100}}{2}\cdot 100=3000\pi\,cm$$

N. 6

In 60 min il primo rubinetto eroga $\frac{V}{2}$ litri d'acqua, il secondo $\frac{V}{3}$ ed il terzo $\frac{V}{4}$. Aprendoli assieme in un'ora si avrebbero $\frac{13}{12}V$ litri d'acqua. Mediante una semplice proporzione, il tempo necessario per riempire la vasca è

$$t=60\cdot\frac{12}{13}\simeq 55\,\mathrm{min}$$

N. 7

Il volume d'acqua spostata è metà di quello della pallina; con le approssimazioni indicate:

$$V=\frac{2}{3}\pi\cdot 2^3\,cm^3=16\,cm^3$$

Per spingerla dobbiamo applicare una forza pari alla differenza tra la spinta di Archimede ed il peso della pallina, cioè $F=\left(16\cdot 10^{-3}-3\cdot 10^{-3}\right)\cdot 10\,N=13\cdot 10^{-2}\,N$. Quindi il peso segnato dalla bilancia è

$$P=\left(300\cdot 10^{-3}+13\cdot 10^{-3}\right)\cdot 10=313\cdot 10^{-2}\,N$$

corrispondente a 313 g.

N. 8

La tensione del filo è ortogonale allo spostamento.

N. 9

Dall'equazione di continuità:

$$v_1S_1=v_2S_2\Leftrightarrow v_2=v_1\frac{S_1}{S_2}=v_1\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2=0.65\left(\frac{3}{0.3}\right)^2=65\,\frac{m}{s}$$

N. 10

La sorgente è in moto, mentre l'osservatore è fermo. Detta f la frequenza emessa e v_s la velocità della sorgente, mentre il treno si avvicina il ragazzo percepisce $f_1=\frac{v}{v-v_s}f$ e mentre si allontana percepisce $f_2=\frac{v}{v+v_s}f$.

Pertanto, mettendo a rapporto le formule precedenti:

$$\frac{f_1}{f_2}=\ldots=\frac{v+v_s}{v-v_s}\Leftrightarrow\frac{v+v_s}{v-v_s}=0.15\Leftrightarrow\ldots\ v_s=\frac{15}{215}v=\frac{3}{43}\cdot 340\simeq 24\,\frac{m}{s}$$

N. 11

Dal principio di conservazione dell'energia meccanica: $\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Leftrightarrow mv^2 = 2mgh \Leftrightarrow v^2 = 2gh \Leftrightarrow$

$$v = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 2} = \sqrt{40} \simeq 6\frac{m}{s}$$

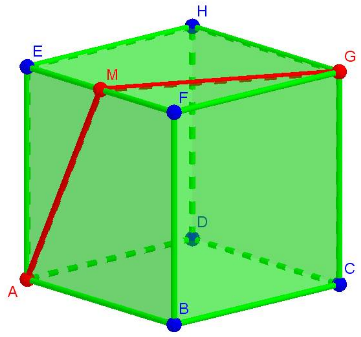
N. 12

Innanzitutto il lavoro è negativo perché il gas subisce una compressione; dopodiché l'area sotto al grafico della trasformazione vale $\frac{(200+400)\cdot 10^3}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 600$ e quindi il lavoro che l'ambiente compie sul gas è:

$$L = -\,600 \text{ J}$$

<u>Problemi numerici:</u>

N. 19



Il percorso minimo si realizza se la formica va da A a G procedendo dapprima lungo il segmento AM (ove M indica il punto medio dello spigolo EF) e poi lungo il segmento MG.
Per il Teorema di Pitagora, applicato al triangolo AME:

$$AM^2 = AE^2 + EM^2 = (4+1)cm^2 = 5cm^2$$

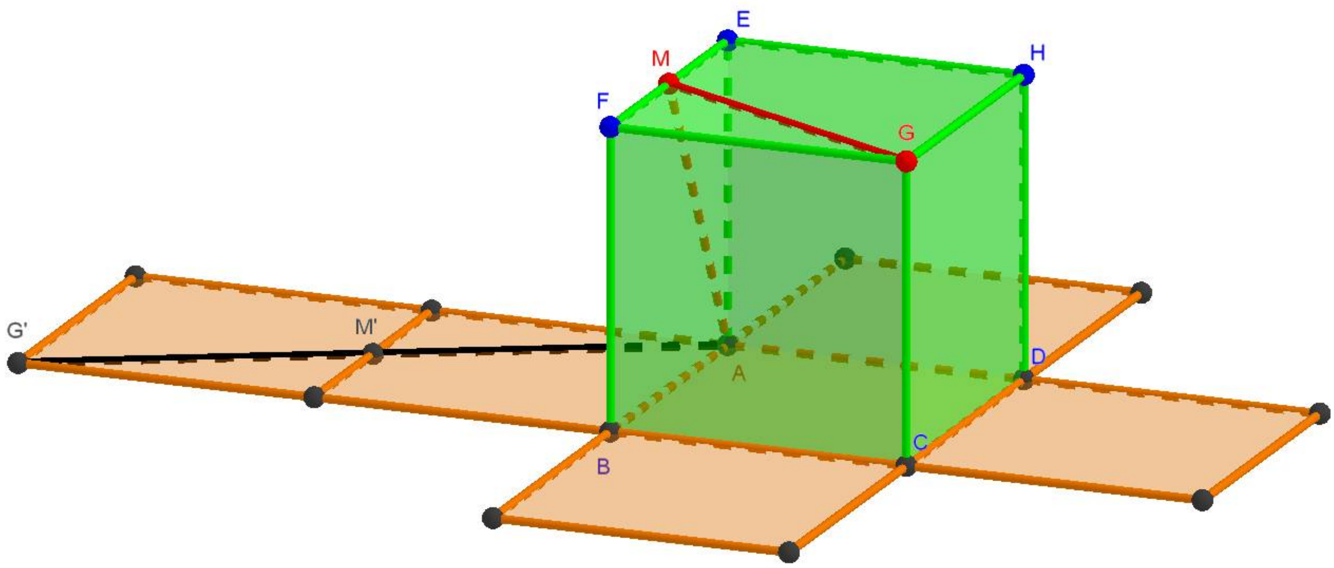
Quindi il percorso minimo è:

$$AM + MG = 2\sqrt{5}\ cm$$

Dal momento che $22^2 = (2 \cdot 11)^2 = 4 \cdot 121 = 484$, mentre $23^2 = 529$, possiamo approssimare $\sqrt{5} \simeq \sqrt{4,84} = 2,2$. Quindi possiamo dire che il percorso minimo vale

$$2\sqrt{5}\ cm = 20\sqrt{5}\ mm \simeq 44\,mm$$

NOTA:
Per meglio comprendere la soluzione, consideriamo lo sviluppo piano del cubo. Il percorso minimo tra A e G è pari alla lunghezza del segmento AG', disegnato nello sviluppo del cubo (poiché il segmento è la linea più breve tra due punti del piano).



N. 20

Riflettiamo sul fatto che il ragazzo si alzerà da terra grazie ai palloncini a cui è appeso quando la spinta di Archimede da essi prodotta supererà il peso complessivo del ragazzo e dei palloncini utilizzati.

In base ai dati del problema, l'Elio ha una densità di $0.2\frac{g}{l}$; pertanto $50\,l$ di He hanno una massa complessiva di

$50g\cdot 0.2\frac{g}{l}=10\,g$. Concludendo: un palloncino pieno di He alla temperatura di 20°C ha una massa di 35 g.

Indicati con F_A la spinta di Archimede, con N il numero dei palloncini utilizzati, con m la massa del ragazzo e con m_p la massa totale di un palloncino pieno, otteniamo la relazione:

$$F_A \geq m\cdot g+N\cdot m_p\cdot g$$

ed, essendo $F_A=d_{aria}\cdot N\cdot V\cdot g$, ove V rappresenta il volume di gonfi aggio del palloncino:

$$d_{aria}\cdot N\cdot V\cdot g\geq m\cdot g+N\cdot m_p\cdot g \Leftrightarrow d_{aria}\cdot N\cdot V\geq m+N\cdot m_p \Leftrightarrow N\left(d_{aria}V-m_p\right)\geq m$$

Pertanto:

$$N\geq \frac{m}{d_{aria}V-m_p}$$

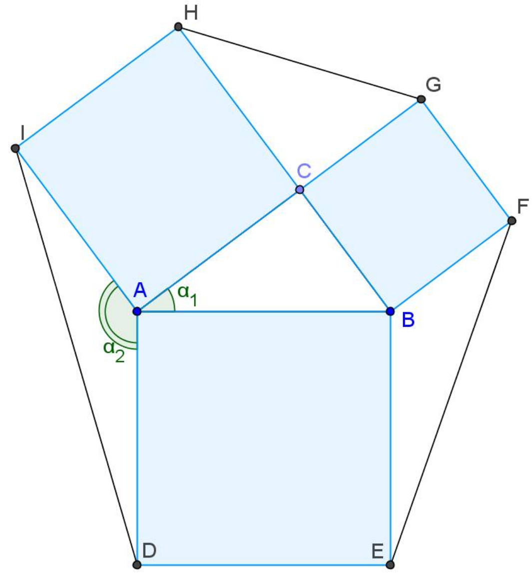
Sostituendo i dati otteniamo:

$$\frac{m}{d_{aria}V-m_p}=\frac{75kg}{1.2\frac{g}{l}\cdot 50l-35g}=\frac{75kg}{60g-35g}=\frac{75\,kg}{25\cdot 10^{-3}\,kg}=3000$$

Pertanto il minimo numero di palloncini necessari per sollevare il ragazzo è **3000**.

PROBLEMA APERTO MATEMATICA
Considera il triangolo rettangolo ABC di ipotenusa AB = 4 m. Sui lati del triangolo costruisci, esternamente al triangolo, dei quadrati e congiungi i vertici dei lati che escono da uno stesso vertice del triangolo. Dimostra che i tre triangoli che così si ottengono sono equivalenti ad ABC.
Calcola l'area dell'esagono convesso che si ottiene congiungendo i vertici "liberi" dei quadrati in funzione dell'angolo acuto α e trovane i valori massimo e minimo.

SOL



Consideriamo i triangoli ABC e ADI in figura.
Dal momento che CBFG e ABED sono quadrati, gli angoli α_1 e α_2 sono supplementari. Pertanto
$\operatorname{sen}\alpha_1 = \operatorname{sen}\alpha_2$ e quindi

$$Area(ABC) = \frac{1}{2} BC \cdot AC \operatorname{sen}\alpha_1 =$$

$$= \frac{1}{2} AD \cdot AI \operatorname{sen}\alpha_2 = Area(ADI)$$

In modo analogo si dimostra che ABC è equivalente anche a BEF e CGH.

Per il Teorema di Pitagora, $AC^2 + BC^2 = AB^2$, pertanto l'area dell'esagono vale

$$S(\alpha) = 2AB^2 + 4Area(ABC) = \ldots =$$

$$= 2 \cdot 16 + 16 \operatorname{sen} 2\alpha = 32 + 16 \operatorname{sen} 2\alpha$$ per $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.

Per tali valori di α, $\operatorname{sen} 2\alpha \ge 0 \Rightarrow$ il valore minimo dell'area è $S_{\min} = S(0) = 32\, m^2$.

Il valore massimo di $\operatorname{sen} 2\alpha$ è 1 e si ottiene quando $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, cioè per $\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$ il valore massimo dell'area è

$$S_{\max} = S\left(\frac{\pi}{4}\right) = 32 + 16 = 48\, m^2.$$

PROBLEMA APERTO FISICA

Un ciclista si allena su un circuito costituito di sole salite e discese. La sua velocità media in discesa è il 20% maggiore della sua velocità media in salita. Il suo tempo di percorrenza del circuito è 73 minuti. Un giorno decide di effettuare il percorso in senso inverso, mantenendo le stesse velocità medie in salita e discesa impiega 70 minuti. Calcola la percentuale di percorso in salita e in discesa del circuito percorso in senso inverso.

SOL

Indichiamo con v la velocità in salita e con $1.2v$ quella in discesa. Nel solito percorso, indichiamo con x la lunghezza complessiva del percorso in salita e con y quella del percorso in discesa. I tempi di percorrenza sono quindi $t_s = \frac{x}{v}$ e $t_d = \frac{y}{1.2v}$.

Il tempo complessivo impiegato solitamente per completare il percorso è quindi

$$\frac{x}{v} + \frac{y}{1.2v} = 73$$

In modo analogo, invertendo il percorso il tempo impiegato dal ciclista è espresso da

$$\frac{x}{1.2v} + \frac{y}{v} = 70$$

Mettendo a sistema:

$$\begin{cases} x + \frac{5}{6}y = 73v \\ \frac{5}{6}x + y = 70v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 5y = 438v \\ 5x + 6y = 420v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30x + 25y = 2190v \\ 30x + 36y = 2520v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 30v \\ x = 48v \end{cases}$$

Il percorso totale può quindi essere espresso da $x + y = 78v$; pertanto la percentuale del percorso in salita è $\frac{30}{78} \cdot 100 = \frac{500}{13} \simeq 38.5\%$ mentre quella del percorso in discesa è 61.5%.