CONCORSO PER L'ASSEGNAZIONE DELLA
5° BORSA DI STUDIO "RICCARDO ROSSI"

Domande a risposta chiusa.

1) D

   Risp: 1728 modi diversi

   Dette V, G e S le bevande, sono possibili 6 ordinamenti diversi per le varie tipologie di bottiglie: VGS, VSG, GVS, GSV, SVG, SGV.

   Dal momento che 2 bottiglie possono essere ordinate in $2! = 2$ modi diversi, 4 in $4! = 24$ e 3 in $3! = 6$, concludiamo che il numero di ordinamenti possibili è

   $6 \times 2 \times 24 \times 6 = 1728$

2) C

   Per le proprietà dei triangoli equilateri, l'incentro C coincide con il baricentro. Pertanto l'altezza del primo triangolo (che è anche mediana) misura

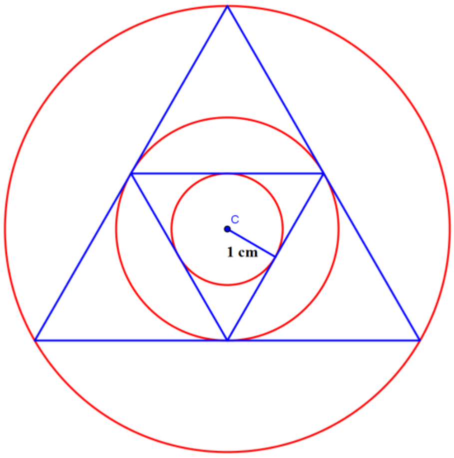
   $$h_1 = 3cm$$

   mentre il raggio del 2° cerchio misura $r_2 = 2cm$.

   Iterando la costruzione, la sequenza dei raggi (espressa in cm) è 1, 2, 4, 8, 16.

   Rapporto delle aree:

   $$\frac{16^2 \pi}{4^2 \pi} = \left(\frac{16}{4}\right)^2 = 16$$



3) B

   Portando tutti i logaritmi in base 2:

   $$\log_2 3 \times \log_3 4 \times \log_4 5 \times \log_5 6 \times \log_6 7 \times \log_7 8 = \log_2 3 \times \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \times \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \times \frac{\log_2 6}{\log_2 5} \times \frac{\log_2 7}{\log_2 6} \times \frac{\log_2 8}{\log_2 7} =$$

   $$= \log_2 8 = 3$$

4) D

   Essendo $10^n = 2^n \times 5^n$, affinchè $\frac{16!}{10^n}$ sia un numero intero è necessario che n non superi il numero dei fattori 5 presenti nella scomposizione di 16!

   Dal momento che 16! ha solo 3 fattori uguali a 5, concludiamo che $n = 3$

5) A

   Indichiamo il numero di riga con *x* ed il numero di colonna con *y*. I valori pari di *x* pari da 1 a 75 sono 37; per ciascuno di essi, i valori di *y* che siano multipli di 3 tra 1 e 75 sono 25.

   In totale abbiamo 925 casi in cui *x* è pari e *y* è multiplo di 3.

   Analogamente vi sono 925 casi in cui *y* è pari e *x* è multiplo di 3.

   In tutto, Chiara dispone 1850 pedine.

6) E

Per avere un'ellisse coi fuochi sull'asse x dev'essere $\sqrt{4^{-n}} \geq \sqrt{\frac{n^2}{1024}}$, cioè $2^{-n} \geq \frac{n}{32}$.

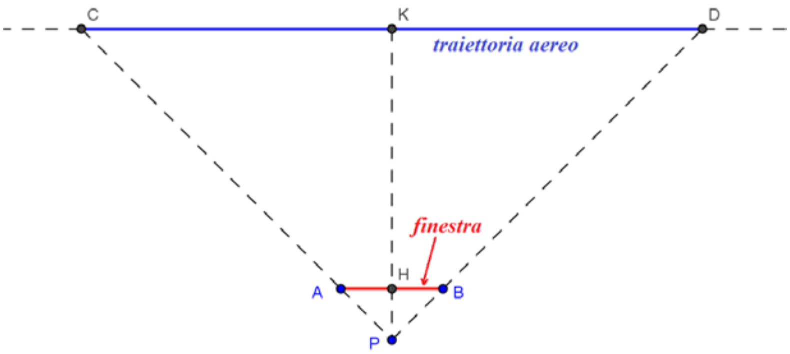
Confrontando i valori delle funzioni:

n	2^{-n}	$\frac{n}{32}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{32}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{32}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$

Quindi l'equazione data rappresenta un'ellisse coi fuochi sull'asse x per 3 valori di n, precisamente 1, 2 e 3.

7) B

Risp: D = 5100 m tramite la similitudine



La lunghezza del tratto CD percorso dall'aereo e visto da Pietro è $CD = 340 \times 30 = 10200m$;

in base alla similitudine tra i triangoli PCD e PAB:

$$AB : CD = PH : PK$$

da cui

$$PK = \frac{PH \times CD}{AB} = \frac{1 \times 10200}{2} = 5100m$$

8) E

Risp: 23°C

Infatti, la metà della piscina è stata riempita normalmente ed ha quindi una temperatura di 34°C; riempiendo l'altra metà con acqua a 12°C la temperatura finale si ottiene dalla relazione

$$\frac{m}{2}c(34 - t) = \frac{m}{2}c(t - 12)$$

da cui

$$t = \frac{34 + 12}{2} = 23°C$$

9) D

Risp: alle 17.15

Prima che parta il 2° treno, ossia in un'ora e mezza, il primo percorre $100 \times 1,5 = 150 km$. A questo punto i due treni distano 440 km e, indicando con *t* il tempo necessario a percorrere questa distanza, dalla relazione

$$100 \times t + 60 \times t = 440$$

si ottiene

$$t = 2,75\ h = 2\ h\ 45\ min$$

L'incontro avviene, quindi, 2 ore e 45 minuti dopo le 14.30, cioè alle 17.15.

10) D

Per tutti i satelliti dello stesso pianeta, il rapporto $\frac{T^2}{R^3}$ è costante (3° legge di Keplero), cioè

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3}.$$

Per ciascuno dei due satelliti, in moto circolare uniforme attorno al pianeta, vale la formula:

$$v_i = \frac{2pR_i}{T_i}, \text{ per } i = 1,2$$

e quindi

$$T_i = \frac{2pR_i}{v_i}, \text{ per } i = 1,2.$$

Sostituendo nella 3° legge di Keplero, otteniamo:

$$\frac{4p^2R_1^2}{v_1^2} \times \frac{1}{R_1^3} = \frac{4p^2R_2^2}{v_2^2} \times \frac{1}{R_2^3}$$

da cui, semplificando:

$$\frac{1}{R_1 \times v_1^2} = \frac{1}{R_2 \times v_2^2},$$

cioè

$$R_1 \times v_1^2 = R_2 \times v_2^2.$$

Poiché per ipotesi $R_2 = 2R_1$:

$$R_1 \times v_1^2 = 2R_1 \times v_2^2$$

cioè

$$v_1^2 = 2 \times v_2^2$$

11) C

Imponendo che ad ogni istante la funzione che descrive l'onda luminosa vari con continuità attraverso la superficie che separa i due mezzi, si ottiene la frequenza dell'onda incidente e dell'onda rifratta devono essere uguali. Dalle relazioni $v = \frac{c}{n} = l\ f$ segue che ad ogni passaggio della luce da un mezzo ad un altro con indice di rifrazione diverso variano sia v che λ.

12) B

Uguagliando la forza di repulsione coulombiana a quella elastica (che in questo caso rappresenta l'interazione forte) otteniamo:

$$k_{elast} \cdot x = k_c \cdot \frac{q^2}{x^2}$$

da cui

$$k_{elast} = k_c \cdot \frac{q^2}{x^3} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1{,}6^2 \cdot 10^{-38}}{1{,}6^3 \cdot 10^{-45}} = \frac{9}{1{,}6} \cdot 10^{16} = 5{,}625 \cdot 10^{16} \frac{N}{m}$$

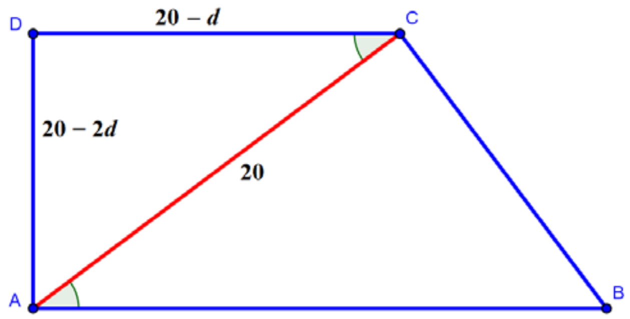
NOTA: la costante di Coulomb vale $9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$

(in realtà la forza nucleare forte richiede anche un neutrone per fare elio3 altrimenti il nucleo non sta insieme)

RISPOSTE DI SCIENZE

13) A
14) C
15) B
16) A
17) B
18) E

QUESITO NUMERICO - MATEMATICA



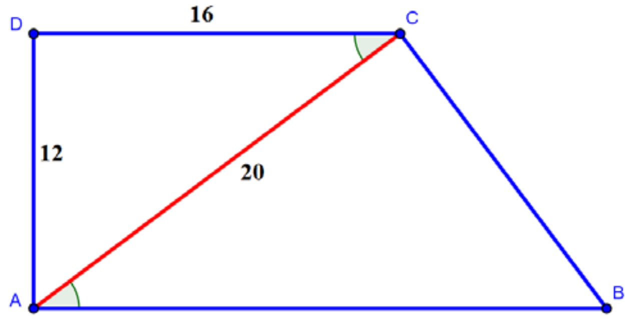
Per il teorema di Pitagora $AC^2 = AD^2 + CD^2$, da cui $(20 - 2d)^2 + (20 - d)^2 = 400$,

ovvero

$$d^2 - 24d + 80 = 0$$

La precedente equazione ammette le soluzioni $d_1 = 4$ e $d_2 = 20$.

La prima delle due soluzioni produce la sequenza accettabile 12, 16, 20, mentre la seconda produce i valori – 20, 0, 20 (che non possono essere considerati misure di lati di un triangolo).



L'unica possibilità è, quindi AD = 12 cm, CD = 16 cm.

I triangoli rettangoli ABC e ACD sono simili, in quanto gli angoli $\hat{ACD}$ e $\hat{BAC}$ sono alterni interni e quindi uguali. Pertanto:

$$AB : 20 = 20 : 16$$

cioè

$$AB = \frac{400}{16} = 25cm$$

L'area del giardino misura pertanto:

$$\frac{12(25+16)}{2} = 6 \cdot 41 = 246 m^2$$

QUESITO NUMERICO – FISICA

Per sollevare una massa m ad un'altezza h è necessario compiere un lavoro $L_{utile} = mgh$. Se la pompa ha un rendimento del 60%, il lavoro compiuto dal motore della pompa è tale che $L_{pompa} \cdot 0,6 = L_{utile}$, da cui

$$L_{pompa} = \frac{L_{utile}}{0,6}$$

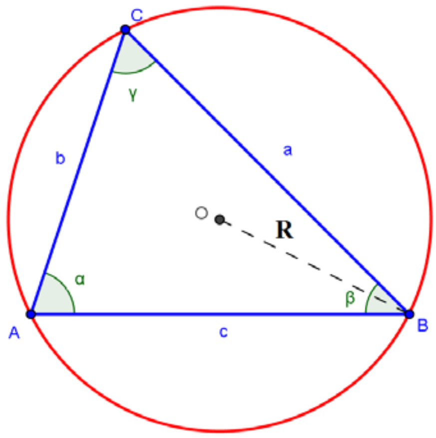
La potenza erogata dal motore vale quindi

$$P = \frac{mgh}{0,6 \cdot \Delta t} = \frac{720 \cdot 100 \cdot 10}{0,6 \cdot 60} = \frac{72 \cdot 10^4}{36} = 20 kW$$

PROBLEMA MATEMATICA

Soluzione

(a) Dal teorema dei seni:



$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R_C$$

Ricordando, inoltre, che l'area può esser calcolata mediante la formula

$$Area = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen}\alpha$$

ricaviamo

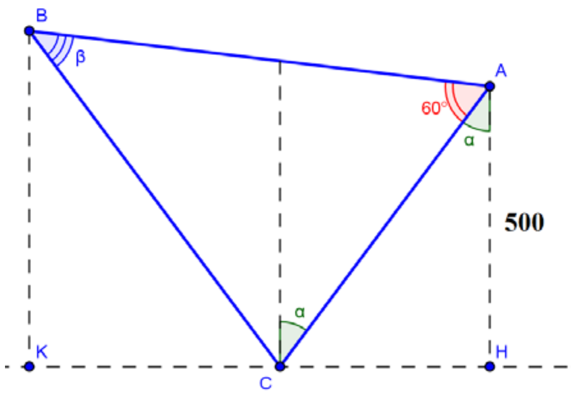
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2Area}{bc}$$

Comparando le due formule otteniamo:

$$2R_C = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{a}{\frac{2Area}{bc}}$$

da cui

$$R_C = \frac{abc}{4Area}$$



(b) Consideriamo ora il triangolo ABC.
Dal momento che l'angolo di incidenza e quello di riflessione sono uguali, possiamo dire che $\widehat{ACB} = 2\alpha$.
Pertanto, in base ai dati del problema:

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25} \quad \text{e} \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

Inoltre, per il teorema dell'angolo esterno:

$$\beta = \pi - \left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi - 2\alpha$$

e quindi

$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}\pi - 2\alpha\right) = \operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi \cdot \cos 2\alpha - \cos\frac{2}{3}\pi \cdot \operatorname{sen} 2\alpha =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{7}{25} - \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{24}{25} = \frac{24 + 7\sqrt{3}}{50}$$

Consideriamo ora il triangolo rettangolo ACH:

$$AH = AC \cdot \cos\alpha \Rightarrow AC = \frac{AH}{\cos\alpha} = \frac{500}{\frac{4}{5}} = 625m$$

Applicando il Teorema dei seni al triangolo ABC:

$$\frac{BC}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}} = \frac{AC}{\operatorname{sen}\beta}$$

da cui

$$BC = \frac{AC}{\operatorname{sen}\beta}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{625}{\frac{24 + 7\sqrt{3}}{50}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{625\cdot 50}{\left(8\sqrt{3} + 7\right)\cdot\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15625}{8\sqrt{3} + 7}$$

Ricordando l'approssimazione suggerita dal testo:

$$\sqrt{3} \cong 1,75$$

otteniamo banalmente

$$8\sqrt{3} + 7 \cong 14 + 7 = 21$$

Quindi:

$$BC \cong \frac{15625}{21} \cong 744m$$

Si verifica facilmente che i triangoli rettangoli BKC e ACH sono simili; pertanto

$$BC : AC = BK : AH$$

da cui

$$BK = \frac{BC \cdot AH}{AC} \cong \frac{744\cdot 500}{625} = \frac{744\cdot 5\cdot 5^2\cdot 4}{5^4} = \frac{2976}{5} = 595,2m$$

PROBLEMA FISICA

Soluzione

Innanzitutto ricordiamo che la capacità elettrica di un conduttore è il rapporto costante tra la carica in esso contenuta ed il potenziale a cui si porta il conduttore (in virtù della carica); in definitiva:

$$C = \frac{Q}{V}$$

Ricordando che per un conduttore sferico di raggio R risulta $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$ e che $k_C = 4\pi\varepsilon_0$, otteniamo banalmente:

$$C = \frac{Q}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}} = 4\pi\varepsilon_0 R = \frac{R}{k_C}$$

(A) Determiniamo le cariche presenti su ciascuna sfera; sulla base dei dati:

$R_1 = 9cm = 9 \times 10^{-2}m$

$V_1 = 60V$

$$C_1 = \frac{9 \times 10^{-2}}{9 \times 10^{9}} = 10^{-11}F$$

Quindi:

$Q_1 = C_1V_1 = 6 \times 10^{-10}C$

$R_2 = 18cm = 1{,}8 \times 10^{-1}m$

$V_2 = 150V$

$$C_2 = \frac{18 \times 10^{-2}}{9 \times 10^{9}} = 2 \times 10^{-11}F$$

Quindi:

$Q_2 = C_2V_2 = 2 \times 10^{-11} \times 150 = 3 \times 10^{-9}C$

(B) La carica totale presente sulle sfere è $Q_{tot} = 6 \times 10^{-10} + 3 \times 10^{-9} = 3{,}6 \times 10^{-9}C$.
Le cariche, una volta raggiunto l'equilibrio elettrostatico dopo esser state messe a contatto, si suddividono sulle due sfere in modo tale che ciascuna delle due sfere sia allo stesso potenziale (altrimenti verrebbero violate le condizioni di equilibrio elettrostatico).

Dalla relazione $V_1 = V_2$ si ricava facilmente $\frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2}$; si ottiene, quindi, il sistema:

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = Q_{tot} \\ \frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_1 + q_2 = Q_{tot} \\ \frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{2R_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}q_2 = Q_{tot} \\ q_1 = \frac{q_2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_2 = 2{,}4 \times 10^{-9}C \\ q_1 = 1{,}2 \times 10^{-9}C \end{cases}$$

(C) Determiniamo ora il "potenziale d'equilibrio" tra le due sfere:

$$V_1 = k_C\frac{q_1}{R_1} = 9 \times 10^{9} = 120V$$