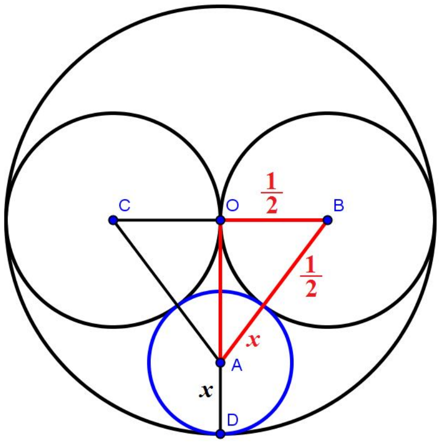
QUESITI A RISPOSTA CHIUSA

n. 1



Consideriamo il triangolo rettangolo OAB; dal testo risulta facilmente che $OA = OD - AD = 1 - x$, $OB = \frac{1}{2}$ e $AB = \frac{1}{2} + x$.

Per il Teorema di Pitagora:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 \Leftrightarrow (1-x)^2 + \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2} + x\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$1 - 2x + x^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + x + x^2 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Risp. D

n. 2

Ricordiamo che il numero *N* di cifre decimali del numero naturale *n* è dato dalla formula $N = \lfloor \mathrm{Log}\, n \rfloor + 1$, cioè dalla *parte intera* del logaritmo decimale di *n*, aumentata di 1.

Dato che 2^{100} ha 31 cifre decimali si deduce che $30 < Log\, 2^{100} < 31$. Quindi:

$$Log\, 5^{100} = 100 \cdot Log\, 5 = 100 \cdot Log\, \frac{10}{2} = 100\left(Log\, 10 - Log 2\right) = 100\left(1 - Log 2\right) =$$

$$= 100 - 100 \cdot Log\, 2 = 100 - Log\, 2^{100}$$

e perciò

$$69 < Log\, 5^{100} < 70.$$

Se ne deduce che 5^{100} ha 70 cifre decimali.

Risp. A

n. 3

Risolvendo l'equazione $x^2 + x - 2 = 0$ si ottiene facilmente la seguente scomposizione del trinomio $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$.

Dal momento che $P(x) = (x-1)(x^2 - a^2)(x^2 - a - 1)$, il polinomio è sempre divisibile per $x - 1$. Se ne deduce che P(*x*) è divisibile per $x^2 + x - 2$ se e solo se $P_1(x) = (x^2 - a^2)(x^2 - a - 1)$ è divisibile per $x + 2$ e, per il Teorema di Ruffini, questo accade se e solo se $P_1(-2) = 0$.

D'altra parte $P_1(-2) = (4 - a^2)(4 - a - 1) = (4 - a^2)(3 - a) = (2 - a)(2 + a)(3 - a)$ ha evidentemente 3 zeri reali distinti: ± 2 e 3; quindi P(*x*) è divisibile per $x^2 + x - 2$ per 3 valori di *a*.

Risp. C

n. 4

Dalla relazione $3a = 2b$ si deduce che *a* è necessariamente pari (poiché 2 e 3 sono numeri primi). Quindi si può scrivere $a = 2n$, con $n \in \mathbb{N}$, e di conseguenza $b = 3n$. Se ne conclude che

$$a + b = 2n + 3n = 5n$$

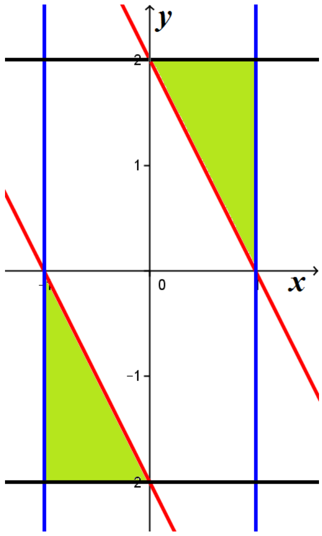
Di conseguenza *a* + *b* è multiplo di 5.

Per capire che le altre risposte sono errate basta considerare *a* = 4 e *b* = 6:

- $a + b = 4 + 6 = 10$ è pari
- *a* e *b* sono entrambi pari
- $ab = 4 \cdot 6 = 24$ è multiplo di 4

Risp. A

n. 5



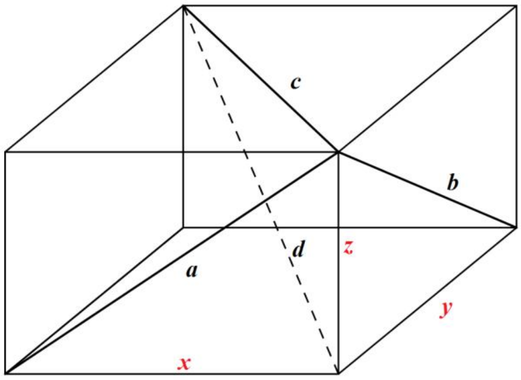
Consideriamo le tre disequazioni separatamente:

- $(2x+y)^2 \geq 4 \Leftrightarrow 2x+y \leq -2$ o $2x+y \geq 2$ descrive la regione di piano *esterna* alla striscia delimitata dalle rette $2x+y+2=0$ e $2x+y-2=0$
- $x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$ descrive la regione di piano *interna* alla striscia delimitata dalle rette $x=-1$ e $x=1$
- $y^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 2$ descrive la regione di piano *interna* alla striscia delimitata dalle rette $y=-2$ e $y=2$

Si tratta, quindi, della regione di piano colorata in figura, equivalente al rettangolo di base 1 ed altezza 2. L'area vale quindi 2 unità.

Risp. D

n. 6



Dette *x*, *y* e *z* le misure degli spigoli del solido, risulta banalmente:

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

D'altra parte:

$a^2 = x^2 + z^2$

$b^2 = y^2 + z^2$

$c^2 = x^2 + y^2$

da cui

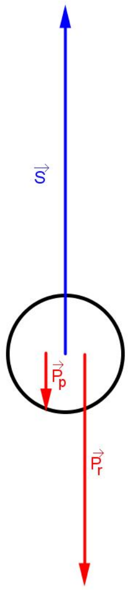
$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) = 2d^2$$

Concludendo:

$$d = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}$$

Risp. B

n. 7



Sulla base dei dati del problema, il peso totale della paracadutista $(\vec{P}_r)$ e del paracadute $(\vec{P}_p)$ è un vettore di intensità $P_{TOT} = 750N$, diretto verso il basso; inoltre il paracadute riceve una spinta verso l'alto $(\vec{S})$ di intensità 900 N. Schematizziamo il problema utilizzando il modello *punto materiale*.

La forza risultante, ottenuta sommando la spinta verso l'alto ed il peso, è quindi rivolta verso l'alto ed ha modulo $R = 900 - 750 = 150N$. Dal momento che la massa totale (ragazza e paracadute) vale 75 kg, si conclude che l'accelerazione complessiva vale 2 m/s^2 ed è diretta verso l'alto.

Risp. D

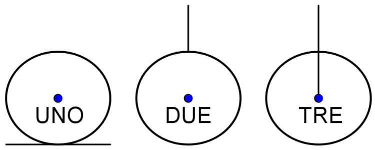
n. 8

Per il terzo principio della dinamica, la forza che spinge i gas fuori dal razzo è uguale alla forza che spinge il razzo.

Risp. C

n. 9

Quando si fornisce calore ad un oggetto vincolato, a causa della dilatazione lineare, il suo baricentro si muove nel modo consentito dal vincolo.



Indichiamo con y_G la coordinata verticale del baricentro del disco e con $L_i = mg\Delta y_G$ il lavoro che viene svolto dalla forza peso per sollevare/abbassare il baricentro.

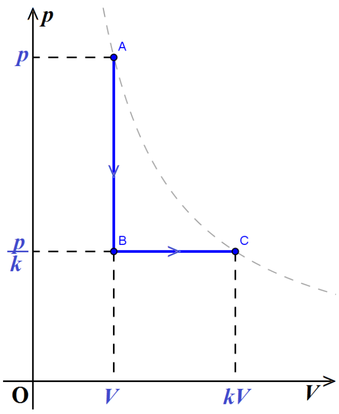
- CASO UNO: il calore fornito viene in parte utilizzato per "sollevare" il baricentro per cui $L_1 < 0$. Con la notazione usuale in calorimetria si ha $Q + L_1 = mc\Delta T_1$.
- CASO DUE: a causa della dilatazione il baricentro si "abbassa" quindi $L_2 > 0$. E si ha ancora $Q + L_2 = mc\Delta T_2$.
- CASO TRE: a causa del vincolo il baricentro non si muove quindi $L_3 = 0$. E si ha $Q = mc\Delta T_3$.

Ne segue in modo ovvio che $\Delta T_1 < \Delta T_3 < \Delta T_2$ e, visto che la temperatura iniziale è identica nei tre casi: $T_1 < T_3 < T_2$.

Risp. D

n. 10

Com'è noto, il calore scambiato tra un sistema termodinamico ed una sorgente termica dipende dalla trasformazione seguita. Detti, rispettivamente, C_P e C_V i calori molari a pressione ed a volume costanti, per la ben nota relazione di Meyer: $C_P = C_V + R$



Una mole di gas perfetto scambia le seguenti quantità di calore:

- $Q_{AB} = nC_V\Delta T_{AB} = C_V\Delta T_{AB}$
- $Q_{BC} = nC_P\Delta T_{BC} = C_P\Delta T_{BC} = -C_P\Delta T_{AB}$, avendo riportato il gas alla temperatura iniziale.

Quindi:

$$Q_{TOT} = Q_{AB} + Q_{BC} = C_V\Delta T_{AB} - C_P\Delta T_{AB} = (C_V - C_P)\Delta T_{AB} = -R\cdot\Delta T_{AB}$$

cioè

$$Q_{TOT} = R(T_A - T_B)$$

D'altra parte, durante l'isocora:

$$\frac{p_A}{T_A} = \frac{p_B}{T_B}$$

da cui

$$T_B = \frac{p_B}{p_A}\cdot T_A = \ldots = \frac{T}{k}$$

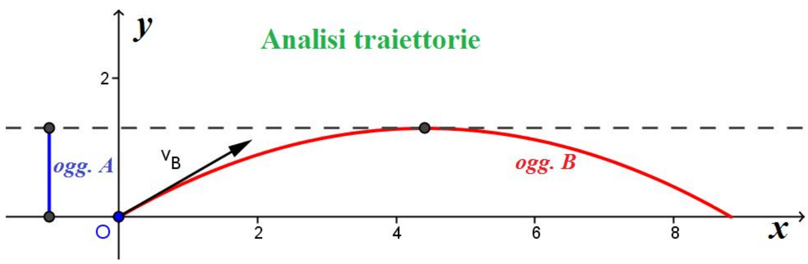
Perciò:

$$Q_{TOT} = R(T_B - T_A) = R\left(T - \frac{T}{k}\right) = \left(1 - \frac{1}{k}\right)RT$$

Risp. C

n. 11

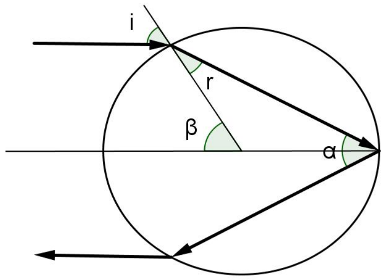
La risoluzione del problema è indipendente dalla massa, inoltre le componenti orizzontale e verticale del moto del corpo B sono indipendenti tra loro. Si tratta, quindi, di confrontare le componenti verticali dei due moti.



Dal momento che $v_{By} = v_B \operatorname{sen} 30° = 5\dfrac{m}{s} = v_A$, risulteranno uguali anche le altezze massime raggiunte dai due oggetti, come evidenziato dal disegno.

Risp. C

n. 12



L'angolo α misura 60° per ipotesi; per il teorema dell'angolo al centro, tenuto conto che l'asse di simmetria è la sua bisettrice anche β misura 60°. Dato che β e l'angolo di incidenza *i* sono corrispondenti di rette parallele tagliate da una trasversale, anche *i* misura 60°. Dato che l'asse di simmetria è ovviamente bisettrice di α, l'angolo di rifrazione *r* misura 30°. Ne segue che $n = \dfrac{\sin 60°}{\sin 30°} = \sqrt{3} \simeq 1{,}73$.

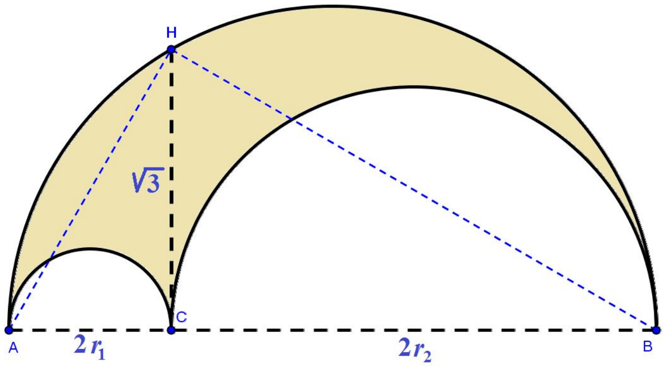
Risp. E

SOLUZIONI AI QUESITI DI BIOLOGIA E CHIMICA

13	14	15	16	17	18
C	B	E	B	C	D

Quesiti a risposta numerica

19. MATEMATICA



Com'è noto, il triangolo ABH è rettangolo, essendo inscritto in una semicirconferenza.

Detti r_1 e r_2 i raggi dei due semicerchi interni, per il 2° Teorema di Euclide si ottiene:

$$AC : CH = CH : CB$$

cioè

$$CH^2 = AC \cdot CB \Leftrightarrow 2r_1 \cdot 2r_2 = 3 \Leftrightarrow r_1 r_2 = \frac{3}{4}$$

D'altra parte, detto r il raggio del cerchio più grande:

$$r_1 + r_2 = r$$

da cui

$$r^2 = r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2 \cdot \frac{3}{4} = r_1^2 + r_2^2 + \frac{3}{2}$$

L'area colorata vale quindi:

$$S = \frac{\pi}{2}\left(r^2 - r_1^2 - r_2^2\right) = \frac{\pi}{2}\left(r_1^2 + r_2^2 + \frac{3}{2} - r_1^2 - r_2^2\right) = \ldots = \frac{3}{4}\pi dm^2$$

Procediamo con l'approssimazione:

$$\boxed{S \simeq 0,75 \cdot 3 \cdot 100 = 225 cm^2}$$

20. FISICA

Affinché il satellite resti in orbita è necessario che l'attrazione gravitazionale e la forza centripeta siano uguali; perciò, detta v_1 la velocità del primo satellite:

$$\pi \frac{v_1^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2} \Leftrightarrow v_1^2 = G\frac{Mm}{\pi R}$$

In modo analogo otteniamo, per il secondo satellite: $v_2^2 = G\dfrac{Mm}{4\pi R}$

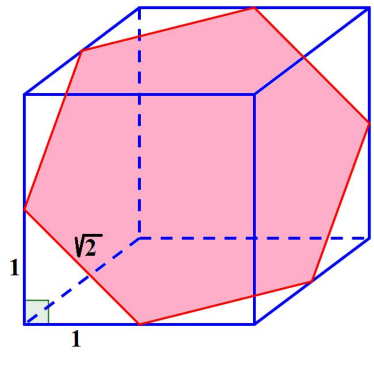
Perciò:

$$\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = G\frac{Mm}{4\pi R} \cdot \frac{\pi R}{GMm} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\dfrac{2\pi \cdot 4R}{T_2}}{\dfrac{2\pi R}{T_1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4}{T_2} \cdot T_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{T_2 = 8T_1 = 32 ore}$$

PROBLEMA MATEMATICA

Consideriamo il cubo in figura; per dividerlo con un piano in due solidi congruenti aventi in comune una figura di sezione a forma di esagono regolare, bisogna:

- selezionare due spigoli per faccia e prenderne il punto medio
- successivamente bisogna congiungere i punti medi degli spigoli appartenenti alla stessa faccia

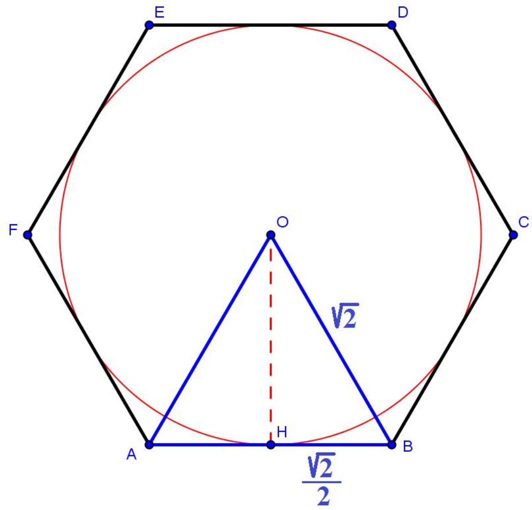


In questo modo, ciascuna faccia risulta divisa in un triangolo rettangolo isoscele di lato 1 *m* ed un pentagono non regolare.

Si dimostra facilmente che i solidi ottenuti con questa procedura sono congruenti tra loro.

Per quel che riguarda il calcolo del perimetro dell'esagono contenuto nel piano di sezione, ciascun lato dell'esagono è, in realtà, ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele; pertanto $l = \sqrt{2}m$.

Il perimetro dell'esagono vale quindi $\boxed{6\sqrt{2}\,m}$.



Per quanto riguarda il raggio del cerchio inscritto, è bene ricordare che un esagono regolare può essere suddiviso in 6 triangoli equilateri congruenti, congiungendone i vertici con il centro del cerchio inscritto. Il raggio di tale cerchio è, quindi, uguale all'altezza di ciascun triangolo equilatero.
In base al Teorema di Pitagora otteniamo

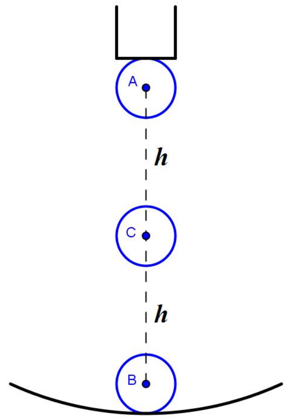
$$OH^2 = OB^2 - HB^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}m^2$$

e quindi

$$\boxed{r = OH = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}m}$$

PROBLEMA FISICA

1° METODO



Il moto delle gocce è rettilineo uniformemente accelerato. Suddividiamo lo spazio da percorrere in due parti uguale, a seconda di dove si trova ciascuna goccia nel momento in cui la prima tocca il lavandino.
Calcoliamo la velocità che una data goccia ha quando arriva a metà strada, cioè quando la precedente tocca il lavandino, usando la conservazione dell'energia:

$$mg \cdot 2h = mgh + \frac{1}{2}mv_C^2 \Leftrightarrow v_C^2 = 2gh \Leftrightarrow v_C = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0{,}1} = \sqrt{2}\frac{m}{s}$$

Tempo di caduta CB:

$$y = v_C t + \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}gt^2 + v_C t - h = 0 \Leftrightarrow 5t^2 + \sqrt{2}t - 0{,}1 = 0$$

$$\Delta = 2 - 4 \cdot 5(-0{,}1) = 4 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-\sqrt{2} \pm 2}{10} = \begin{cases} \nearrow \dfrac{2-\sqrt{2}}{10} > 0 \\ \searrow -\dfrac{2+\sqrt{2}}{10} < 0 \end{cases}$$

Delle due soluzioni, quella negativa va scartata; consideriamo l'altra:

$$T = \frac{2-\sqrt{2}}{10} \simeq \frac{2-1{,}4}{10} = \frac{0{,}6}{10} = \frac{3}{50}s \Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{50}{3} \simeq 16{,}67\,Hz}$$

2° METODO (più facile)

Con la notazione usuale della cinematica, si ha: $y = \frac{1}{2}gt^2$. Quindi il tempo di caduta dall'altezza $2h$ è: $t_1 = \sqrt{\frac{4h}{g}} = 2\sqrt{\frac{h}{g}}$, mentre il tempo necessario per compiere la prima metà della percorso è $t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Quindi l'intervallo fra l'impatto di due gocce è $\Delta t = t_1 - t_2 = \left(2-\sqrt{2}\right)\sqrt{\frac{h}{g}}$. Utilizzando le approssimazioni proposte dal testo del problema: $\Delta t = \left(2-\sqrt{2}\right) \cdot 0{,}1s = 0{,}06s$.

Pertanto la frequenza richiesta è $\boxed{f = \frac{1}{0{,}06} = \frac{100}{6} \simeq 16{,}67\,Hz}$