CONCORSO PER L'ASSEGNAZIONE DELLA BORSA DI STUDIO "RICCARDO ROSSI"

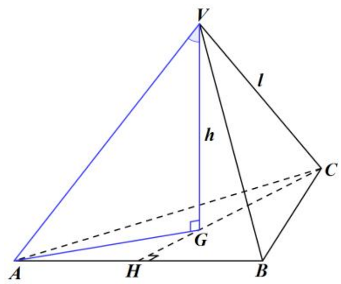
CORREZIONE A CURA DI LORENZO MENEGHINI

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA DI MATEMATICA E FISICA

N. 1

$123_8 = 1\cdot8^2 + 2\cdot8^1 + 3\cdot8^0 = 83_{10}$ e $123_4 = 1\cdot4^2 + 2\cdot4^1 + 3\cdot4^0 = 27_{10}$
$83_{10} - 27_{10} = 56_{10} = 132_6$
Risp. C

N. 2



Osserviamo che l'altezza del tetraedro regolare cade nel baricentro del triangolo equilatero di base; in questo modo, essendo $CH = \frac{\sqrt{3}}{2}l$, risulta:

$AG = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}l = \frac{\sqrt{3}}{3}l$. Per il Teorema di Pitagora, allora: $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}l\right)^2 + h^2 = l^2$

cioè $h = \sqrt{\frac{2}{3}}l$.

Il volume del tetraedro è, quindi: $V = \frac{1}{3}S_b \cdot h = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}l^2\frac{\sqrt{6}}{3}l = \frac{\sqrt{2}}{12}l^3$. Il rapporto dei volumi è $\frac{\sqrt{2}}{12}$

Risp. D

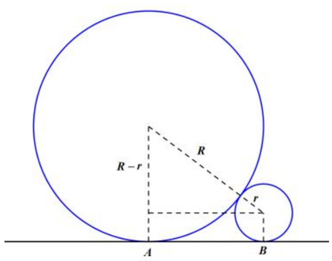
N. 3

Se l'equazione data ammette 1 come soluzione, per definizione risulta $a + 2b - 3a + 1 = 0$, cioè $b = a - \frac{1}{2}$. Applicando il metodo di Ruffini si ottiene, quindi: $(x-1)(ax^2 + ax + 3a - 1) = 0$

La somma delle altre due radici si ricava ricordando la relazione tra coefficienti e radici di un'equazione di secondo grado; precisamente $x_1 + x_2 = -\frac{a}{a} = -1$.

Risp. B

N. 4



Applicando il Teorema di Pitagora otteniamo:

$$AB^2 + (R-r)^2 = (R+r)^2$$

da cui si ricava facilmente

$$AB = 2\sqrt{rR}$$

Risp. A

N. 5

Osserviamo che $2012 = 2^2\cdot503$; l'aspetto complicato di questo quesito è dimostrare che 503 sia un numero primo. D'altra parte, però, è noto che basta spingersi con i controlli fino alla parte intera della radice quadrata di 503. Essendo $22^2 = 484$ e $23^2 = 529$, dobbiamo controllare la divisibilità di 503 per numeri primi (dispari) inferiori a 22; chiaramente non è un numero divisibile per 3 né per 5 (dai criteri di divisibilità).

$503 = 490 + 13 = 7\cdot70 + 13$ quindi non è divisibile per 7

$503 = 495 + 8 = 11{\cdot}45 + 8$ quindi non è divisibile per 11
$503 = 494 + 9 = 13{\cdot}38 + 9$ quindi non è divisibile per 13
$503 = 493 + 10 = 17{\cdot}29 + 10$ quindi non è divisibile per 17
$503 = 494 + 10 = 19{\cdot}26 + 9$ quindi non è divisibile per 19
Perciò 503 è numero primo; se ne conclude che 2012 ha 6 divisori positivi distinti. Perciò esistono 6 numeri interi positivi nella forma $\frac{2012}{n-5}$.

Risp. E

N. 6
L'aiuola è costituita da un quadrante di cerchio di raggio $r = 2\ m$, da un quadrante di ellisse di semiassi rispettivamente 2 m e 4 m e da un segmento parabolico. Utilizzando il Teorema di Archimede per il calcolo dell'area del segmento parabolico e le formule πr^2 e πab per il calcolo delle aree di cerchio ed ellisse si ottiene la seguente stima dell'area dell'aiuola:

$$A = \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 4 + \frac{4\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = 16 + 3\pi \simeq 25$$

Risp. C

N. 7
Se il filo fosse elastico, chiaramente non si otterrebbe un arco di circonferenza poiché la tensione del filo non sarebbe la stessa in tutte le posizioni.
Risp. D

N. 8
Per misure statiche, la massa rimane costante. Ciò che varia sensibilmente in funzione della quota a cui viene misurata è l'accelerazione di gravità. Pertanto cambia pure il peso.
Risp. B

N. 9
La quantità d'acqua che arriva è pari a 600 *litri/minuto* = 10 *l/s* = $10^{-2}\ m^3/s$. La pompa dovrà, quindi, essere in grado di asportare 10*kg* d'acqua ogni secondo, eseguendo un lavoro di circa $10^4\ J$ per ogni secondo di funzionamento. La potenza minima utile è quindi 10 *kW*.
Risp. A

N. 10
La velocità angolare cresce secondo la legge $\omega = \omega_0 + \alpha\ t$, dove α rappresenta l'accelerazione angolare. Pertanto: $\omega = 2{,}5 + 7{\cdot}3{,}6 = 27{,}7 \simeq 28\ rad/s$.

Risp. A

N. 11
Per il *teorema dell'impulso*, l'impulso della forza F è pari alla variazione della quantità di moto; pertanto: $F_m \cdot \Delta t = \Delta Q$ da cui $F_m = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{35}{10} = 3{,}5N$

Risp. D

N. 12
Il *"lavoro utile"* compiuto dalla forza F è pari a $L_{tot} = F{\cdot}s{\cdot}\cos 60° = 250$ J. La variazione di energia cinetica subita dal carrello è pari a $\Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2 = 160$ J. Pertanto il lavoro della forza d'attrito è:

$$L_{att} = L_{tot} - \Delta E_c = 90J$$

La forza d'attrito vale, quindi, in modulo:

$$F_{att} = \frac{L_{att}}{s} = 18N$$

Risp. B

Risposte corrette BIOLOGIA E CHIMICA:
La stringa delle risposte corrette è la seguente: 13 C - 14 A - 15 B - 16 D - 17 D - 18 A

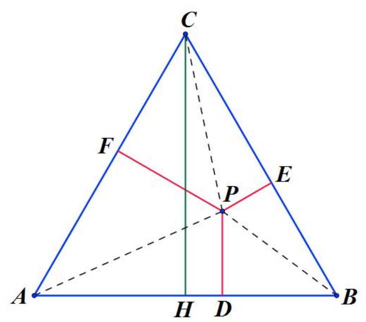
Problema a risposta numerica: FISICA
Il problema si basa sul 1° Principio della Termodinamica: Q = L + ΔU.
È noto che il lavoro L compiuto dal sistema durante la trasformazione può essere calcolato come "area sotto il grafico"; pertanto $L = \frac{1}{2}(2V_0 - V_0)(p_0 + 2p_0) = \frac{3}{2}p_0V_0$.
La variazione di energia interna, invece, vale $\Delta U = nc_v\Delta T$; l'Elio è un gas monoatomico, quindi $c_v = \frac{3}{2}R$. Perciò: $\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T$. D'altra parte si ha, per l'equazione di stato dei gas perfetti: $p_0V_0 = nRT_0$ ed anche $2p_0 2V_0 = nRT_1$. Quindi: $\Delta U = \frac{3}{2}3p_0V_0 = \frac{9}{2}p_0V_0$.
In totale, quindi: $Q = 6p_0V_0 = 6 \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 10^{-3} = 4500J$

Problema a risposta numerica: MATEMATICA
Detto *x* il numero di scolari, l'equazione che risolve il problema è:

$$\frac{3(x+x)}{4} + 1 = 100$$

Pertanto: $\frac{3}{2}x = 99$ e quindi *x* = 66.
Il numero di studenti è, quindi 66.

Problema a risposta aperta: MATEMATICA[1]
Partendo dal punto P tracciamo le distanze PD, PE e PF dai lati del triangolo. L'area del triangolo ABC può essere calcolata in due modi differenti:



$$Area(ABC) = \frac{AB \cdot CH}{2} = \frac{l}{2} \cdot CH$$

$$Area(ABC) = Area(ABP) + Area(PBC) + Area(PAC) = \frac{l}{2} \cdot PD + \frac{l}{2} \cdot PE + \frac{l}{2} \cdot PF$$

Pertanto

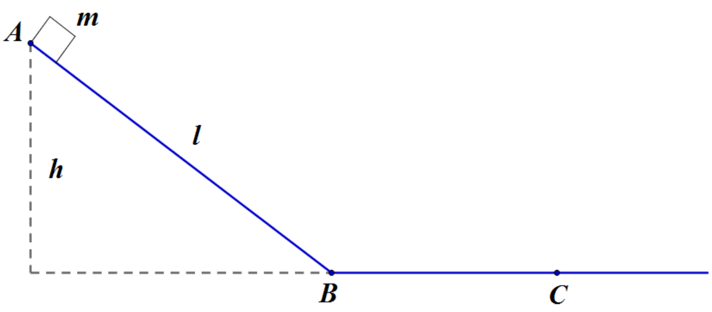
$$\frac{l}{2} \cdot CH = \frac{l}{2} \cdot PD + \frac{l}{2} \cdot PE + \frac{l}{2} \cdot PF$$

da cui

$$CH = PD + PE + PF$$

[1] Abbiamo deciso di proporre questa soluzione, sebbene ve ne siano anche altre corrette, poiché riteniamo sia la più elegante tra quelle che abbiamo trovato, ma soprattutto perché è quella fornita da due dei partecipanti al concorso (Agnolin Andrea e Zenere Francesca).

Problema a risposta aperta: FISICA



Lungo il piano inclinato agiscono la forza peso $\vec{P}$, la reazione del vincolo $\vec{N}$ e la forza di attrito $\vec{F_A}$.
L'equazione dinamica è, quindi:

$$\vec{F_A} + \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$$

Scomponendo la forza peso in direzione parallela ed ortogonale al piano inclinato si ottiene:

$$P_{\parallel} = P\frac{h}{l} = 1800 \cdot \frac{3}{5} = 1080\,N \quad \text{e}$$

$$P_{\perp} = P\sqrt{1-\left(\frac{h}{l}\right)^2} = 1800 \cdot \frac{4}{5} = 1440\,N$$

Inoltre:

$$F_A = kN = kP_{\perp} = 432\,N$$

La forza complessivamente agente lungo il piano inclinato durante la discesa vale, quindi:

$$-F_A + P_{\parallel} = 1080 - 432 = 648\,N$$

Per il *Teorema dell'energia cinetica*: $L_{TOT} = \Delta E_C$
Quindi:

$$648 \cdot 5 = \frac{1}{2} \cdot 180 \cdot v^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{3240}{90} = \frac{324}{9} = 36\,\frac{m^2}{s^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = 6\,\frac{m}{s}}$$

Giunta in B, la cassa si muove su un piano orizzontale. In questo caso, la forza di attrito diviene:

$$F_A = kN = kP = 540\,N$$

Studiamo lo *spazio di frenata*, ricorrendo sempre al *Teorema dell'energia cinetica*:

$$L_{TOT} = \Delta E_C \quad \Rightarrow \quad -540x = -\frac{1}{2} \cdot 180 \cdot 36 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{180 \cdot 36}{1080} = 6\,m}$$